# Module AP-12 : ANALYSE REELLE
# Polycopié du cours

Mohammed Heyouni [1]

1. ENSA d'Al-Hoceima, Université Mohammed Premier, Oujda.
Email: mohammed.heyouni@gmail.com.

## Contenu du polycopié

Ce polycopié de cours du Module ***AP-12 : ANALYSE REELLE*** s'adresse aux élèves de la première année du cycle préparatoire de l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima (ENASH). Le cours traite, autant que possible, le contenu des chapitres ci-dessous. ce contenu a été adopté lors de la demande de renouvèlement d'accréditation, selon le nouveau CNPN (Cahier des Normes Pédagogiques Nationales) pour l'année 2014.

- **Chapitre 1. Nombres réels.**
  *Partie minorée, majorée, bornée. Borne supérieure et inférieure. Axiome de la borne supérieure. Propriétés de la borne supérieure (inférieure). Propriétés de la valeur absolue. Propriétés de la partie entière d'un réel.*

- **Chapitre 2. Suites numériques.**
  *Généralités sur les suites de type* $u_n = f(n)$ *et sur les suites récurrentes. Suite stationnaire bornée, monotone. Convergence d'une suite. Suites extraites. Suites de Cauchy. Opérations sur les suites. Suites arithmétiques et géométriques. Suites adjacentes. Suites récurrentes du type* $u_n = f(u_{n-1})$ *et du type* $u_n = a\,u_{n-1} + b\,u_{n-2}$.

- **Chapitre 3. Fonctions réelles. Limite et Continuité.**
  *Parité d'une fonction. Fonction périodique. Fonction bornée. Fonction monotone. Opérations sur les fonctions. Limite d'une fonction. Limites usuelles. Continuité d'une fonction. Restriction et prolongement d'une fonction. Propriétés des fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de Bolzano. Injectivité, surjectivité et bijectivité. Fonction réciproque et monotonie. Fonctions uniformément continues. Théorème de Heine. Fonction lipschitzienne. Fonctions continues et suites de réels.*

- **Chapitre 4. Fonctions réelles. Dérivabilité.**
  *Dérivée d'une fonction. Dérivée à gauche et dérivée à droite. Interprétation géométrique de la dérivée. Extrémums et dérivabilité. Opérations sur les dérivées. Dérivées successives. Fonction de classe* $C^n$. *Formule de Leibniz. Théorème de Rolle et accroissement finis. Règle de l'Hospital. Formule de Taylor-Young. Dérivation et intégration des développements de Taylor-Young. Développements limités : définition, développement des fonctions usuelles, opérations sur les développements limités, application des développements limités.*

- **Chapitre 5. Fonctions trigonométriques, hyperboliques et réciproques.**
  *Théorème de la bijection et de la bijection réciproque. Fonctions trigonométriques réciproques :* arcsin, arccos *et* arctan. *Fonctions hyperboliques :* sinh, cosh *et* tanh. *Fonctions hyperboliques réciproques :* argsinh, argcosh, *et* argtanh. *Formulaire de trigonométrie "hyperbolique".*

- **Chapitre 6. Intégration de fonctions réelles.**
  *Notion d'intégrale au sens de Riemann. Théorèmes de calcul intégral. Intégration par parties. Changement de variables. Primitives des fonctions usuelles et des fractions rationnelles. Notions sur les intégrales généralisées : convergence, convergence absolue, critères de convergence.*

# Table des matières

# Chapitre 1

# Nombres réels

## 1.1 Introduction

On suppose connues les propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$ dit ensemble des entiers naturels ainsi que celles de l'ensemble $\mathbb{Z}$ dit ensemble des entiers relatifs.

### 1.1.1 Nombres rationnels

Par définition, un nombre $r$ est dit un nombre rationnel s'il existe deux nombres $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \dfrac{p}{q}$. Ainsi l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ s'écrit

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \text{ tels que } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\}.$$

Parmi les nombres rationnels, on trouve les nombres décimaux qui sont des nombres de la forme $\dfrac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on peut affirmer que

**Proposition 1.1.** *Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale périodique ou finie.*

Nous ne donnons pas démonstration à cette proposition, par contre nous devons savoir l'appliquer. Ainsi, par exemple, les nombres :

$$x = 0,25 \qquad y = 0,3333333\ldots \qquad z = 15,068\,\underline{2143}\,\underline{2143}\,\underline{2143}\ldots$$

sont des nombres rationnels. Cela se voit facilement pour les nombres $x$ et $y$ qui valent respectivement $x = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{3}$. Par contre, ce n'est pas le cas du nombre $z$. Et donc, avant de terminer cette section, vérifions que $z = 15,068\,\underline{2143}\,\underline{2143}\,\underline{2143}\ldots$ est un rationnel.

L'idée de la démonstration repose sur la périodicité de l'écriture de $z$ que nous allons multiplier par $10^3$ (car la période pour le nombre $z$ -qu'on a considéré- commence 3 chiffres après la virgule). On a alors

$$10^3 z = 15068,\underline{2143}\,\underline{2143}\,\underline{2143}\ldots \tag{1.1}$$

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, c'est à dire que dans notre cas on multiplie par $10^4$ pour décaler de 4 chiffres. On a donc

$$10^4\,10^3 z = 150682143,\underline{2143}\,\underline{2143}\ldots \tag{1.2}$$

Les parties après la virgule des deux égalités (1.1) et (1.2) sont les mêmes, donc si on les soustrait en faisant (1.2)-(1.1) alors les parties décimales s'annulent et on obtient :

$$10^7 z - 10^3 z = 9999000z = 150667066.$$

Et donc $z = \dfrac{150667066}{9999000}$ ; ce qui prouve bien que $z \in \mathbb{Q}$.

### 1.1.2 Nombres irrationnels

Nous avons vu précédemment que les nombres qui ont une écriture décimale périodique ou qui ont un nombre fini de chiffres après la virgule (donc ayant également une écriture décimale périodique mais avec des zéros !) sont des nombres rationnels. Qu'en est t'il alors des nombres tels que

$$\sqrt{2} = 1,41421356237.... \qquad \pi = 3,141592653589... \qquad e = 2,718281828459...,$$

qui n'ont pas une écriture décimale périodique ? De tels nombres sont dits irrationnels car ce ne sont pas des nombres rationnels comme on le peut vérifier pour le nombre $\sqrt{2}$.

**Exercice 1.1.** *Montrez que le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel*

**Réponse :** Pour montrer que "$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$", nous procédons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est un rationnel. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad &\Longrightarrow \quad \exists\, p,\ q \in \mathbb{N} \text{ tels que } \sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ et } pgcd(a,b) = 1 \text{ avec } p \text{ ou } q \text{ impair} \\ &\Longrightarrow \quad p^2 \text{ est pair car } p^2 = 2q^2. \end{aligned}$$

Considérons alors les cas :

- ***Cas 1 :*** $p$ est impair.
  Alors $p = 2n + 1$ et $p^2 = 4n^2 + 4n + 1$ est impair d'ou contradiction avec le fait que $p^2$ est pair.

- ***Cas 2 :*** $p$ est pair.
  Alors $p = 2n$ et donc $2q^2 = p^2 = 4n^2$, c'est à dire $q^2 = 2n^2$ d'où $q^2$ est pair et donc $q$ est pair et donc contradiction avec le fait que au mois $p$ ou $q$ est impair.

Ainsi, les deux cas considérés ci dessus nous permettent de conclure que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

## 1.2 Le corps des nombres réels

On admet l'existence de l'ensemble $\mathbb{R}$ dit ensemble des nombres réels. Muni des opérations + et × (l'opération × est notée ·), l'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps commutatif, c'est à dire que l'ensemble $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ (a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$ (associativité de la loi +)
- $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R},\ a+b = b+a$ (commutativité de la loi +)
- $\exists\ e\ \in \mathbb{R}\ (e=0)$, tel que $a+e=a$ (0 élément neutre de +)
- $\forall\ a \in \mathbb{R},\ \exists a' \in \mathbb{R}\ (a' = -a)$, tel que $a + a' = e$ ($-a$ symétrique -ou encore opposé- de $a$)

- $\forall\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ (a \cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) = a\cdot b\cdot c$ (associativité de la loi $\cdot$)
- $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R},\ a\cdot b = b\cdot a$ (commutativité de la loi $\cdot$)
- $\forall\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ (a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c)$ (distributivité de $\cdot$ par rapport à $+$)
- $\exists\ e' \in \mathbb{R}^*\ (e' = 1)$, tel que $a\cdot e' = a$ (1 élément neutre de $\cdot$)
- $\forall\ a \in \mathbb{R}^*, \exists\ a^{-1} \in \mathbb{R}^*\ (a^{-1} = \frac{1}{a})$, tel que $a\cdot a^{-1} = e'$ ($a^{-1}$ inverse de $a$)

De plus, en munissant $\mathbb{R}$ de la relation d'ordre $\leq$, on peut vérifier que $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné puisque

- $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$, on a soit : $a \leq b$ ou $b \leq a$, (en particulier, on $a \leq a,\ \forall a \in \mathbb{R}$)
- $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$, on a : $a \leq b$ et $b \leq a \Longleftrightarrow a = b$
- $\forall\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, on a : $a \leq b$ et $b \leq c \Longrightarrow a \leq c$, (transitivité de $\leq$)

De plus, l'ordre induit par $\leq$ est compatible avec l'addition + possède la propriété de positivité supplémentaire, en effet

- $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\quad a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c$
- $\forall x,\ y \in \mathbb{R},\quad x \leq y \Longrightarrow ax \leq ay\ \ \forall a \in \mathbb{R}^+$

Les propriétés précédentes -celles relatives à l'ordre $\leq$ ainsi que celles qui font de l'ensemble $\mathbb{R}$ un corps commutatif totalement ordonné- permettent d'obtenir les implications ou équivalences ci-après qui sont les règles de calcul sur $\mathbb{R}$ en liaison avec l'ordre $\leq$. Nous détaillons cette liste sans démonstration.

- Soit $a \in \mathbb{R}$ alors : $a \geq 0 \Longleftrightarrow -a \leq 0$
- Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ alors : $a \geq 0$ et $b \leq 0 \Longrightarrow ab \leq 0$
- Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ alors : $a \leq 0$ et $b \leq 0 \Longrightarrow ab \geq 0$
- Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ alors $a \geq b \Longleftrightarrow a - b \geq 0$
- Soit $b \in \mathbb{R}^+$, alors $a - b \leq a \leq a + b$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- Soit $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, alors $a > b$ et $c > 0 \Longrightarrow ac > bc$
- Soit $a \in \mathbb{R}$, alors $a > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} > 0$
- Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$, alors $0 < a < b \Longrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
- Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$, alors $a \geq 0$ et $b \geq 1 \Longrightarrow ab \geq a$
- Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$, alors $a \geq 0$ et $0 \leq b \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq ab \leq a$
- Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$, alors $a \geq b \Longleftrightarrow -a \leq -b$
- Soient $a,\ b \in \mathbb{R}^+$, $a^2 \leq b^2 \Longleftrightarrow a \leq b$
- Soient $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$, $(0 < a \leq b)$ et $(0 < c \leq c) \Longrightarrow (0 < ac \leq bd)$ et $(0 < \frac{a}{d} < \frac{b}{c})$

### 1.2.1 Partie minorée, majorée, bornée

Dans toute cette section, $A$ désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

**Définition 1.1.** *Soient $M$, $m \in \mathbb{R}$, on dit que :*
– *$M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A si $\forall x \in A,\ x \leq M$. On dit alors que A est majorée.*

– *$m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A si $\forall x \in A,\ x \geq m$. On dit alors que A est minorée.*

– *A est bornée si A est à la fois minorée et majorée.*

Dans la suite, nous devons tenir compte des remarques et propriétés suivantes :

- Un majorant ou un minorant d'une partie $A$ n'est pas forcément un élément de $A$.
- S'il existe un majorant $M$ de $A$ qui appartient à $A$, alors $M$ est unique. Cet élément est appelé plus grand élément de $A$ et on note $M = \max(A)$. Ainsi

$$M = \max(A) \Longleftrightarrow M \in A \text{ et } M \text{ est un majorant de } A.$$

- S'il existe un minorant $m$ de $A$ qui appartient à $A$, alors $m$ est unique. Cet élément est appelé plus petit élément de $A$ et on note $M = \min(A)$. Ainsi

$$m = \min(A) \Longleftrightarrow m \in A \text{ et } m \text{ est un minorant de } A.$$

**Exemple 1.1.**

1. *Les intervalles $I = ]-1,\ 2[$ et $J = [-1,\ 2]$ sont bornés car ils sont majorés par 2 et minorés par -1. De plus,* $\min(J) = -1$ *et* $\max(J) = 2$ *par contre* $\min(I)$ *et* $\max(I)$ *n'existent pas.*
2. *$A = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z}\}$ est majorée par 1 et minorée par -1.*
3. *L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est minoré par 0 mais n'est pas majoré.*
4. *Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont ni minorés ni majorées.*

### 1.2.2 Borne supérieur, borne inférieure

**Définition 1.2.** *Soient $\mathscr{S}$ l'ensemble des majorants de A et $\mathscr{I}$ l'ensemble des minorants de A.*
– *Le plus petit élément de $\mathscr{S}$, s'il existe, est appelé borne supérieur de A. Cet élément est noté* $\sup(A)$.

– *Le plus grand élément de $\mathscr{I}$, s'il existe, est appelé borne inférieur de A. Cet élément est noté* $\inf(A)$.

Concernant ces deux notions de borne supérieur et borne inférieure, nous devons remarquer que :

- La borne supérieure de $A$ s'elle existe est unique et c'est le plus petit des majorants de $A$.
- Si $A$ admet un plus grand élément, alors cet élément est la borne supérieure de $A$.
- La borne inférieure de $A$ si elle existe est unique et c'est le plus grand des minorants de $A$.
- Si $A$ admet un plus petit élément, alors cet élément est la borne inférieure de $A$.

**Exemple 1.2.**

1. *Soit $A = \{1 + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z}\}$, alors* $\max(A) = \sup(A) = 2$ *et* $\min(A) = \inf(A) = 0$.

2. *Soit* $B = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}$, *alors on vérifie que* $\sup(B) = \sqrt{2} \notin B$.

**Proposition 1.2.** *(Axiome de la borne supérieure (inférieure))*

1. *Toute partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure dans* $\mathbb{R}$.
2. *Toute partie non vide minorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure dans* $\mathbb{R}$.

**Remarque 1.1.** *La borne supérieure ou inférieure d'une partie* $A$ *de* $\mathbb{R}$ *quand elle existe n'appartient pas toujours à* $A$ *et on a*

$$\begin{aligned} M = \sup(A) \in A &\iff M \text{ est le plus grand élément de } A. \\ m = \inf(A) \in A &\iff m \text{ est le plus petit élément de } A. \end{aligned}$$

**Théorème 1.1.** *(Caractérisation de la borne supérieure (inférieure))*
*Soit* $A$ *une partie non vide de* $\mathbb{R}$,
– *si* $A$ *admet une borne supérieure alors*

$$M = \sup(A) \iff (\forall a \in A,\ a \le M) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A,\ \ M - \varepsilon < x \le M).$$

– *si* $A$ *admet une borne inférieure alors*

$$m = \inf(A) \iff (\forall a \in A,\ a \ge m) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A,\ \ m \le x < m + \varepsilon).$$

En tenant compte des résultats précédents, nous pouvons vérifier que :

- $\sup(A) = \max(A) \iff A$ est majorée *et* $\max(A)$ existe.
- $\inf(A) = \min(A) \iff A$ est minorée *et* $\min(A)$ existe.
- $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$, et $a \le b$, $\sup([a,\ b]) = \sup(]a,\ b]) = \sup([a,\ b[) = \sup(]a,\ b[) = \sup(]-\infty,\ b]) = \sup(]-\infty,\ b[) = b$.
- $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$, et $a \le b$, $\inf([a,\ b]) = \inf(]a,\ b]) = \inf([a,\ b[) = \inf(]a,\ b[) = \inf([a,\ +\infty[) = \inf(]a,\ +\infty[) = a$.

### 1.2.3 Propriétés de la borne supérieure et de la borne inférieure

**Proposition 1.3.** *Soient* $A$, $B$ *deux parties non vides de* $\mathbb{R}$ *tels que* $A \subset B$ .

– *Si* $B$ *est majorée alors* $A$ *est majorée et* $\sup(A) \le \sup(B)$.

– *Si* $B$ *est minorée alors* $A$ *est minorée et* $\inf(B) \le \inf(A)$.

**Définition 1.3.** *Soient* $A$ *et* $B$ *deux parties non vides de* $\mathbb{R}$, *on définit les ensembles* $-A$ *et* $A + B$ *respectivement par*

$$-A = \{-a,\ a \in A\} \quad \text{et} \quad A + B = \{a + b,\ a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

**Proposition 1.4.** *Soient* $A$, $B$ *deux parties non vides de* $\mathbb{R}$,

1. *Si* $A$ *est majorée alors* $-A$ *est minorée et on a* $\inf(-A) = -\sup(A)$.
2. *Si* $A$ *est minorée alors* $-A$ *est majorée et on a* $\sup(-A) = -\inf(A)$.
3. *Si* $A$ *et* $B$ *sont majorées alors* $A + B$ *est majorée et on a* $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. *Si* $A$ *et* $B$ *sont minorées alors* $A + B$ *est minorée et on a* $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

### 1.2.4 Valeur absolue

**Définition 1.4.** *Soit $x$ un nombre réel, on appelle valeur absolue de $x$ qu'on note $|x|$ le réel défini par :*

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{si } x \geq 0 \\ -x & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Parmi les propriétés vérifiées pour la valeur absolue, on a :

- Pour tout réel $x$, $|x| = \max(x, -x)$ où $\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } x \leq y. \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} |x| = x \Longleftrightarrow x \geq 0 \\ |x| = -x \Longleftrightarrow x \leq 0 \end{cases}$
- $\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y| \quad \text{et} \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$.
- $\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \begin{cases} x^2 = y^2 \Longleftrightarrow |x| = |y| \\ x^2 \leq y^2 \Longleftrightarrow |x| \leq |y| \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x| \quad \text{et} \quad |x|^2 = x^2$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}^+,\ (|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a) \quad \text{et} \quad (|x| \geq a \Longleftrightarrow x \leq -a \text{ ou } a \leq x)$

**Proposition 1.5.**

1. $\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|$. *(inégalité triangulaire)*
2. $\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ |x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$. *(double inégalité triangulaire)*
3. $\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$.
4. $\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ |x + y| = |x| + |y| \Longleftrightarrow xy \geq 0 \Longleftrightarrow$ *$x$ et $y$ ont le même signe.*

### 1.2.5 Partie entière

**Théorème 1.2.** *Pour tout réel $x$, il existe un unique entier relatif $n$ tel que $n \leq x < n + 1$. Cet entier est noté $E(x)$ et est appelé partie entière de $x$.*

Les propriétés ci dessous peuvent établies sans grand effort, elles sont données sans démonstration.

- Le nombre $E(x)$ est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à $x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} E(x) & \leq & x & < & E(x) + 1 \\ x - 1 & \leq & E(x) & < & x \end{cases}$
- $E(x + m) = E(x) + m,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall\ m \in \mathbb{Z}$.
- $E(-x) = -E(x) - 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$,.

# Chapitre 2

# Suites numériques

## 2.1 Généralités

### 2.1.1 Définitions et exemples

**Définition 2.1.** *Une suite d'éléments d'un ensemble $\mathbb{E}$ est une application $u$ de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{E}$, ou ce qui revient à dire au même une famille d'éléments de $\mathbb{E}$ indicée par $\mathbb{N}$, i.e.,*

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & n & \longmapsto & u(n) =: u_n \end{array}$$

**Vocabulaire et notations.**

- L'image $u(n)$ est notée $u_n$ et est appelée terme d'indice $n$, ou terme général, de la suite $u$.
- La suite en elle même est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou $(u_n)_{n\geq 0}$ ou en abrégé $(u_n)$.
- On parle de suite numérique réelle lorsque $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ et de suite numérique complexe si $\mathbb{E} = \mathbb{C}$.

**Exemple 2.1.**

1. *Soit* $u_n = \dfrac{1}{n}$, $(n > 0)$.
   *Les termes successifs de la suite* $(u_n)$ *sont :* $1, \ \dfrac{1}{2}, \ \dfrac{1}{3}, \dots, \ \dfrac{1}{n}, \ \dots$

2. *Soit* $v_n = \sin(n\dfrac{\pi}{2})$, $(n \geq 0)$.
   *Les termes successifs de la suite* $(v_n)$ *sont :* $1, \ 0, \ -1, \ 0, \ 1, \ 0, \ -1, \ 0, \ \dots,$
   *Dans ce cas,* $v_n$ *ne prend que trois valeurs distinctes.*

3. $w_n = n + \dfrac{(-1)^n}{n-2}$, $(n \geq 3)$.
   *Les termes successifs de la suite* $(w_n)$ *sont :* $2, \ \dfrac{9}{2}, \ \dfrac{14}{3}, \ \dfrac{25}{4}, \ \dots,$
   *Pour cet exemple,* $w_n$ *prend une infinité de valeurs.*

4. $t_n = e^{\imath\frac{\pi}{n}} = \cos(\dfrac{\pi}{n}) + \imath\sin(\dfrac{\pi}{n})$, $(n > 0)$.
   *Les termes successifs de* $(t_n)$ *sont :* $-1, \ \imath, \ \dfrac{1}{2} + \imath\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \ \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \imath\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos(\dfrac{\pi}{5}) + \imath\sin(\dfrac{\pi}{5}), \ \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \imath\dfrac{1}{2}, \ \dots$

Dans la suite de ce cours, nous nous intéresserons principalement aux suites réelles. En effet, définir une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivaut à définir deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = u_n + \imath v_n,\ \text{ (i.e., } u_n = \Re(z_n) \text{ et } v_n = \Im(z_n)).$$

De plus, nous devons tenir compte des remarques suivantes :

- Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales si et seulement si $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On ne confondra pas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de ces valeurs. Par exemple, si $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$, alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont distinctes et pourtant elles ont le même ensemble de valeurs $\{-1, 1\}$.

**Définition 2.2.** *(Suites récurrentes)*

– *Le terme général d'une suite peut être défini par une relation de la forme $u_n = f(u_{n-1})$ (où $f$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$), la donnée du premier terme $u_0$ permet de construire les termes successifs de la suite, i.e.,*

$$u_0 = \alpha \in \mathbb{R},\ u_1 = f(u_0),\ u_2 = f(u_1),\ u_3 = f(u_2),\ \ldots$$

*Dans ce cas, on dit que $(u_n)$ est une suite récurrente.*

– *Dans certains cas, la récurrence peut porter sur deux termes consécutifs : $u_n = F(u_{n-1}, u_{n-2})$. L'application $F$ étant définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et les deux premiers termes $u_0$ et $u_1$ sont alors donnés.*

**Exemple 2.2.**

1. *Soit la suite de terme général $u_n$ défini par $u_0 = 1$ et $u_n = 1 + \dfrac{1}{u_{n-1}}$ pour $n \geq 1$.*
   *On peut vérifier que les termes successifs de la suite sont : $2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$,.*
2. *La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.*
3. *Plus généralement on a les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 définies par la formule $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$ avec $u_0$ et $u_1$ donnés.*

**Remarque 2.1.** *Soit $f$ une fonction réelle dont le domaine de définition est noté $D_f$. Pour assurer l'existence d'une suite récurrente définie par $u_0 = \alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = f(u_{n-1})$, il faut vérifier que $\alpha$ appartient à $D_f$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n \in D_f \Rightarrow u_{n+1} \in D_f$. Cette remarque est illustrée par l'exemple ci après.*

**Exemple 2.3.** *Soit la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_n = \sqrt{1 - u_{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$.*
*Pour que cette suite soit bien définie, il faut tout d'abord que $u_1$ existe, c'est à dire que $u_0 \leq 1$. De même, pour que $u_2$ existe, il faut que $u_1 \leq 1$, c'est à dire que $u_0 \geq 0$.*
*On vérifie finalement que la condition $0 \leq u_0 \leq 1$ est suffisante pour assurer l'existence de la suite $(u_n)$, car l'intervalle $[0,\ 1]$ est stable par la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x}$.*

### 2.1.2 Suite stationnaire, bornée, monotone

Soit $(u_n)$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)$ est :

- stationnaire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_{n_0},\ \forall\ n \geq n_0$. En particulier, une suite constante ($u_n = u_0,\ \forall\ n \geq n_0$) est une suite stationnaire.
- périodique de période $p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$ et $p$ est le plus petit entier positif vérifiant cette propriété. L'entier $p$ est alors appelé période de la suite $(u_n)$ qui est dite suite $p$-périodique.

- majorée s'il existe un réel $M$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq M$.
- minorée s'il existe un réel $m$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $m \leq u_n$.
- bornée si elle est majorée et minorée, i.e., $\exists m,\ M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.
- croissante (resp. strictement croissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} \geq u_n$ (respectivement $u_{n+1} > u_n$).
- décroissante (resp. strictement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} \leq u_n$ (respectivement $u_{n+1} < u_n$).
- monotone (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante)

**Remarque 2.2.** *Il arrive qu'une propriété ne soit pas vraie pour tous les premiers termes d'une suite mais seulement à partir d'un certain rang. Par exemple,* $(u_n)$ *est croissante à partir d'un certain rang s'il existe un entier* $n_0$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$ *on a* $u_{n+1} \geq u_n$.

**Exemple 2.4.**

1. $u_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$, $(n \geq 0)$ *est périodique de période* $p = 4$.
   *Les termes successifs cette suite sont :* $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \dots,$
2. $u_n = \sin n$ *est majorée.*
3. $u_n = \frac{1}{n}$ *pour* $n \geq 1$ *est strictement décroissante et bornée.*
4. $u_n = e^n$ *est croissante, minorée mais pas majorée.*
5. $u_0 = \alpha \in \mathbb{R}$ *et* $u_n = \sqrt{3u_{n-1} + 4}$ *pour* $n \geq 1$. *On peut vérifier que :*
   - *si* $\alpha = 4$, *alors* $u_n = 4$ *pour tout* $n \geq 0$ *et donc* $(u_n)$ *est constante.*
   - *si* $-\frac{4}{3} \leq \alpha < 4$, *alors* $(u_n)$ *est croissante majorée par* $4$.
   - *si* $\alpha > 4$, *alors* $(u_n)$ *est décroissante minorée par* $4$.

**Proposition 2.1.** *La suite* $(u_n)$ *est bornée si et seulement si la suite* $(|u_n|)$ *est majorée.*

## 2.2 Convergence d'une suite

### 2.2.1 Suites convergentes, divergentes

**Définition 2.3.** *On dit que la suite* $(u_n)$ *est convergente et de limite* $l$, *si pour* $n$ *assez grand* $u_n$ *appartient à tout voisinage donné de* $l$, *i.e.,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \textit{tel que}\ \forall n > N,\ \ |u_n - l| < \varepsilon.$$

*On note alors :* $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**Remarque 2.3.** *Si on note* $l = \alpha + \imath\beta$, *et pour tout* $n$, $z_n = x_n + \imath y_n$, $(\alpha,\ \beta,\ x_n,\ y_n$ *étant des nombres réels), on vérifie que :*

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = l \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha \ \textit{et} \ \lim_{n \to +\infty} y_n = \beta.$$

*Cette remarque permet de ramener la convergence d'une suite complexe à celle de la convergence de deux suites réelles.*

**Définition 2.4.** *On dit qu'une suite réelle $(u_n)$ tend vers $+\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n > N \Longrightarrow u_n \geq A).$$

*De même, on dit qu'une suite réelle $(u_n)$ tend vers $-\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n > N \Longrightarrow u_n \leq A).$$

*On note suivant les cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

**Définition 2.5.** *On dit qu'une suite $(u_n)$ diverge si elle ne converge pas, c'est à dire si elle n'admet pas de limite finie dans $\mathbb{R}$.*

**Exemple 2.5.**

1. *Soit la suite $(u_n)$ où $u_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$.*
   *Cette suite est convergente de limite 1 car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.*

2. *Soit la suite $(v_n)$ où $v_n = n + \dfrac{1}{2n+1}$.*
   *Cette suite est divergente de limite infinie car $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*

3. *Soit la suite $(w_n)$ où $w_n = (-1)^n$.*
   *Cette suite est divergente sans limite car le terme général prend alternativement les valeurs -1 et 1.*

4. *Soit la suite $(t_n)$ où $t_n = \sin n$.*
   *Cette suite est divergente sans limite car la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.*

**Théorème 2.1.** *Si une suite admet une limite alors cette limite est unique.*

**Proposition 2.2.** *Une suite $(u_n)$ réelle convergente est une suite bornée.*

**Remarque 2.4.** *La réciproque de la proposition précédente est fausse. En effet, la suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée et pourtant elle est divergente.*

**Définition 2.6.** *(Suites extraites)*
*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle suite extraite (ou sous suite) de la suite $u$ toute suite $v$ dont le terme général peut s'écrire $v_n = u_{\phi(n)}$, où $\phi$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui même.*

**Exemple 2.6.**

1. *Si $u_n = n + (-1)^n$ et $\phi(n) = 2n$, on obtient la suite extraite $v_n = u_{2n} = 2n+1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Si $u_n = \sin(\dfrac{n\pi}{2})$ et $\phi(n) = 4n+1$, on obtient la suite extraite $v_n = u_{4n+1} = \sin(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}) = \sin(\dfrac{\pi}{2}) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On remarque que cette sous-suite est une suite constante.*

**Proposition 2.3.** *Une suite $(u_n)$ est convergente de limite $l$ si et seulement si toute sous extraite de $(u_n)$ est convergente de limite $l$.*

Les deux remarques suivantes sont particulièrement importantes.

- Une suite $(u_n)$ peut ne pas avoir de limite alors que certaines de ces suites extraites peuvent en avoir.
- Si deux suites extraites d'une même suite $(u_n)$ ont des limites différentes, alors la suite $(u_n)$ n'a pas de limite.

**Proposition 2.4.**

- *Toute suite croissante majorée est convergente de limite* $l = sup\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.
- *Toute suite décroissante minorée est convergente de limite* $l = inf\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.
- *Toute suite croissante non majorée est divergente de limite* $+\infty$.
- *Toute suite décroissante non minorée est divergente de limite* $-\infty$.

### 2.2.2 Suites de Cauchy

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle

**Définition 2.7.** *La* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est dite suite de Cauchy si elle vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \textit{tel que}\ \forall n > N,\ \forall m > N,\ \ |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

**Remarque 2.5.** *Il est facile de vérifier que* $(u_n)$ *est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \textit{tel que}\ \forall n > N,\ \forall p > 0,\ \ |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon.$$

**Théorème 2.2.** *Une suite réelle (ou complexe) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy. On dit que* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) est un ensemble complet.*

**Exemple 2.7.**

1. *Soit* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s}$ *où* $s \leq 1$.
   *On a* $u_{2n} - u_n = \frac{1}{(n+1)^s} + \frac{1}{(n+2)^s} + \ldots + \frac{1}{(2n)^s} \geq n\frac{1}{(2n)^s} \geq \frac{1}{2^s}$ *(car* $\frac{1}{(n+j)^s} \geq \frac{1}{(n+n)^s}$ *pour* $j = 1, \ldots, n$*).*
   *Ainsi* $\lim_{n\to+\infty}(u_{2n} - u_n) \neq 0$ *et donc* $(u_n)$ *n'est pas de Cauchy et par suite elle n'est pas convergente.*

2. *Soit* $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.
   *Soit* $m > n$*, alors*

$$\begin{aligned} |u_m - u_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} \\ &\leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \\ &< \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   *où on a utilisé l'inégalité* $\frac{1}{(n+j)^2} < \frac{1}{n+j-1} - \frac{1}{n+j}$ *pour* $j = 1, 2, \ldots$*. Ainsi* $\lim_{n\to+\infty}(u_m - u_n) = 0$ *et donc la suite* $(u_n)$ *est de Cauchy et par suite elle est convergente.*

Concernant les suites complexes, nous pouvons il est établi que si $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que $z_n = a_n + \imath b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

La suite complexe $(z_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy $\Longleftrightarrow$ Les suites réelles $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont de Cauchy.

**Remarque 2.6.** *Le résultat du théorème précédent n'est pas vérifié pour une suite d'éléments d'un ensemble* $\mathbb{E}$ *quelconque. En effet on peut vérifier que toute suite convergente est de Cauchy. Par contre, dans un ensemble* $\mathbb{E}$ *quelconque, une suite de Cauchy peut ne pas être convergente.*

## 2.3 Opérations sur les suites

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites admettant comme limites respectives $\alpha$ et $\beta$.

**Proposition 2.5.** *(Suite somme)*
*La suite somme $(s_n)$, dont le terme général est définie par $s_n = u_n + v_n$, a pour limite $\alpha + \beta$.*

Il est à noter que si l'une des deux suites est divergente en ayant une limite infinie alors :

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \beta \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$).
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, on a une forme indéterminée qui nécessite une étude plus approfondie pour conclure.

**Proposition 2.6.** *(Suite produit)*
*La suite produit $(p_n)$, dont le terme général est définie par $p_n = u_n v_n$, a pour limite $\alpha\beta$.*

**Proposition 2.7.**
*Si $(u_n)$ est une suite bornée et $(v_n)$ est une suite qui converge vers 0, alors la suite produit $(u_n v_n)$ converge vers 0.*

**Proposition 2.8.** *(Suite inverse)*
*Soit $(u_n)$ une suite de limite $\alpha$ ($\alpha$ non nul) et vérifiant $u_n \neq 0$, $\forall n$. Alors la suite inverse $(v_n)$ dont le terme général est définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, a pour limite $\dfrac{1}{\alpha}$.*

Notons que dans le cas ou la suite $(u_n)$ converge vers 0 ou vers $\infty$, on a les résultats suivants :

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = -\infty$).

**Proposition 2.9.** *(Inégalités et passage à la limite)*
*Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang $n_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \beta$, alors $\alpha \leq \beta$.*

**Théorème 2.3.** *(Théorème des gendarmes)*
*Soient $(u_n)$, $(v_n)$ deux suites convergentes de même limite $l \in \mathbb{R}$ et $(x_n)$ une suite vérifiant $u_n \leq x_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang $n_0$, alors $(x_n)$ est convergente de limite $l$.*

Les résultats précédents permettent de vérifier que :

- Si $(u_n)$, $(v_n)$ sont deux suites réelles vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $v_n \geq u_n$ à partir d'un certain rang $n_0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $(u_n)$, $(v_n)$ deux suites réelles vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang $n_0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

## 2.4 Suites particulières

Soit $(u_n)$ une suite réelle

### 2.4.1 Suites arithmétiques

**Définition 2.8.** *La suite $(u_n)$ est dite arithmétique de raison $r$ si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.*

**Proposition 2.10.** *Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$, alors*

$$\forall n,\ m \in \mathbb{N},\quad u_n = u_m + (n-m)r.$$

*En particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_0 + nr$.*

**Proposition 2.11.** *Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$, alors la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par :*

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} r.$$

### 2.4.2 Suites géométriques

**Définition 2.9.** *La suite $(u_n)$ est dite géométrique de raison $q$ si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n$.*

**Proposition 2.12.** *Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$, alors*

$$\forall n,\ m \in \mathbb{N},\quad u_n = q^{n-m} u_m.$$

*En particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = q^n u_0$.*

**Proposition 2.13.** *Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par :*

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

### 2.4.3 Suites adjacentes

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles,

**Définition 2.10.** *On dit que ces deux suites sont adjacentes, si l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.*

**Exemple 2.8.**

1. *Soient les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

*Ces deux suites sont adjacentes, en effet :*

- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$, *ce qui fait que $(u_n)$ est croissante.*
- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1-n}{(n+1)!} < 0$, *ce qui fait que $(v_n)$ est décroissante.*
- $u_n - v_n = -\dfrac{1}{n!}$, *et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.*

2. *Soit la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *dont le terme général est donné par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

*On peut vérifier que les deux suites extraites* $(x_n)_{n\geq 1} = (u_{2n})_{n\geq 1}$ *et* $(y_n)_{n\geq 1} = (u_{2n+1})_{n\geq 1}$ *sont adjacentes, en effet :*

- $x_{n+1} - x_n = u_{2(n+1)} - u_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} > 0$, *ainsi* $(x_n)$ *est croissante.*
- $y_{n+1} - y_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = -\dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+3} < 0$, *et donc* $(y_n)$ *est décroissante.*
- $y_n - x_n = u_{2n+1} - u_{2n} = \dfrac{1}{2n+1}$, *ce qui donne* $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$.

**Théorème 2.4.** *Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite.*

## 2.5 Suites récurrentes

### 2.5.1 Suites $(u_n)$ telles que $u_n = f(u_{n-1})$

**Théorème 2.5.** *Soit* $f$ *une fonction définie sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *telle que* $f(I) \subset I$. *Si de plus* $f$ *est dérivable sur* $I$ *et vérifie la condition* $|f'(x)| \leq K < 1$, *alors la suite récurrente* $u_n = f(u_{n-1})$ *et* $u_0 \in I$ *est convergente de limite* $l$, *où* $l$ *est l'unique solution de l'équation* $f(x) = x$ *pour* $x \in I$.

**Exemple 2.9.**

1. *Soit la suite récurrente* $u_0 = 1$ *et* $u_n = f(u_{n-1})$ *pour tout* $n \geq 1$ *où* $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.
   *On a* $f'(x) = -\dfrac{1}{(2+x)^2}$ *et pour* $x > 0$, $|f'(x)| = \dfrac{1}{(2+x)^2} < 1$.
   *Ainsi, la suite* $(u_n)$ *est convergente de limite* $l$ *où* $l = \sqrt{2} - 1$ *est l'unique solution positive de l'équation* $f(x) = x$.

2. *Soit la suite* $(u_n)$ *définie par* $u_0 \in [0,\ 1]$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   *La fonction* $f$ *qui définit la suite* $(u_n)$ *est telle que* $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$. *Cette fonction vérifie* $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0$, *ainsi* $f$ *est croissante et comme* $f(0) = \dfrac{1}{2}$ *et* $f(1) = 1$, *il vient que* $[0,\ 1]$ *est stable par* $f$, *c'est à dire que* $f([0,\ 1]) \subset [0,\ 1]$.

   *De plus, on vérifie que* $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{4} < 1$ *pour tout* $x \in [0,\ 1]$.
   *La suite* $(u_n)$ *est la fonction* $f$ *qui la définit vérifient donc les hypothèses du théorème du point fixe. Il en résulte que* $(u_n)$ *est convergente de limite* $l$, *où* $l \in [0,\ 1]$ *est l'unique solution de l'équation* $f(x) = x$.

   *En résolvant cette dernière équation, on trouve que* $l = 1$.

### 2.5.2 Suites $(u_n)$ telles que $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$

On suppose que $ab \neq 0$ car si non, il est facile de vérifier que les suites définies lorsque $a = 0$ ou $b = 0$ sont géométriques.

On démontre que l'expression de la suite $(u_n)$ dans le cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$ dépend des solutions de l'équation du second degré

$$(E) \;\; r^2 - ar - b \text{ où } r \in \mathbb{C}.$$

On a alors les trois cas suivants :

- **cas** $\Delta = a^2 + 4b > 0$**.** L'équation $(E)$ possède deux solutions distinctes $r_1$ et $r_2$, et dans ce cas, la solution générale est :

  $$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n,$$

  et on détermine les constantes $\lambda_1$ et $\lambda_2$ en résolvant le système :

  $$\begin{cases} u_0 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ u_1 &= \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 \end{cases}$$

- **cas** $\Delta = a^2 + 4b < 0$**.** L'équation $(E)$ possède deux solutions complexes conjuguées $r_1 = r_2 = \rho e^{\imath\theta}$, et dans ce cas, la solution générale est alors :

  $$u_n = \rho^n (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)).$$

  Les constantes $A$ et $B$ sont obtenues en résolvant le système :

  $$\begin{cases} u_0 &= A \\ u_1 &= \rho(A\cos(\theta) + B\sin(\theta)) \end{cases}$$

- **cas** $\Delta = a^2 + 4b = 0$**.** L'équation $(E)$ possède une unique solution $r = \dfrac{a}{2}$. On montre alors que la solution générale est donnée par :

  $$u_n = r^n(\lambda_1 + \lambda_2 n),$$

  où $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont déterminées en résolvant le système :

  $$\begin{cases} u_0 &= \lambda_1 \\ u_1 &= r(\lambda_1 + \lambda_2) \end{cases}$$

# Chapitre 3

# Fonctions réelles. Limite et continuité

## 3.1 Fonction réelle d'une variable réelle

### 3.1.1 Définitions

**Définition 3.1.** *On appelle fonction réelle d'une variable réelle, toute application $f$ définie sur une partie $D$ de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $D$ est appelé domaine de définition de $f$ et est noté $D_f$. On a alors*

$$D_f = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \text{ existe}\}.$$

**Exemple 3.1.**

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $D_f = [-1,\ +\infty[$.

**Définition 3.2.** *(Parité d'une fonction)*

– *Une fonction $f$ est dite paire si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.*

– *Une fonction $f$ est dite impaire si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.*

**Exemple 3.2.**

1. *La fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est paire.*
2. *La fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ est impaire.*

**Définition 3.3.** *(Fonction périodique)*

– *Une fonction $f$ est dite périodique, s'il existe un nombre réel positif $p$ non nul tel que*

$$\forall x \in D_f, x+p \in D_f \text{ et } f(x+p) = f(x).$$

– *Le plus petit nombre $p$ satisfaisant à cette définition est appelé la période de la fonction $f$.*

**Exemple 3.3.**

1. *Les fonctions trigonométriques* sin *et* cos *sont périodiques de période $2\pi$.*
2. *La fonction $f$ définie par $f(x) = x - E(x)$ (où $E(x)$ est la partie entière de $x$) est périodique de période 1.*

**Définition 3.4.** *(Fonction bornée)*
*Soit $f$ une fonction réelle ayant $D_f$ pour domaine de définition. On dit que $f$ est :*

- *minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D_f$, on a $m \leq f(x)$.*
- *majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) \leq M$.*
- *bornée si $f$ est majorée et minorée.*

**Vocabulaire et notations**

- Si $f$ est majorée, on appelle borne supérieure de $f$ le nombre réel $\sup\limits_{D_f}(f) = \sup\{f(x);\ x \in D_f\}$.
- Si $f$ est minorée, on appelle borne inférieure de $f$ le nombre réel $\inf\limits_{D_f}(f) = \inf\{f(x);\ x \in D_f\}$.
- On dit que $f$ admet un maximum en $a \in D_f$ si $f(a)$ est le maximum de la partie $f(D_f) = \{f(x),\ x \in D_f\}$.
- On dit que $f$ admet un maximum local en $a \in D_f$ si il existe $I$ un intervalle ouvert contenant $a$ et tel que $f(a)$ soit le maximum de $f(D_f \cap I)$.
- On dit que $f$ admet un minimum en $a \in D_f$ si $f(a)$ est le minimum de la partie $f(D_f) = \{f(x),\ x \in D_f\}$.
- On dit que $f$ admet un minimum local en $a \in D_f$ si il existe $I$ un intervalle ouvert contenant $a$ et tel que $f(a)$ soit le minimum de $f(D_f \cap I)$.
- Un extremum (local) est un maximum (local) ou un minimum (local).

**Remarque 3.1.** *Une fonction bornée possède toujours une borne supérieure et une borne inférieure mais pas forcément un maximum et un minimum.*

**Exemple 3.4.**

1. *La fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$ est majorée par 1 et minorée par 0. Elle est donc bornée.*
2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, alors $D_f = [-1,\ 1]$ et $f$ est bornée avec $\sup\limits_{[-1,1]}(f) = \max\limits_{[-1,1]}(f) = 1$. De même $\inf\limits_{[-1,1]}(f) = \min\limits_{[-1,1]}(f) = 0$.*
3. *Soit $f : ]0,1[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors $f$ est bornée. On a $\sup\limits_{]0,1[}(f) = 1$, mais $\max\limits_{]0,1[}(f)$ n'existe pas. De même, on a $\inf\limits_{]0,1[}(f) = 0$, mais $\min\limits_{]0,1[}(f)$ n'existe pas.*
4. *Une fonction peut admettre un maximum en plusieurs points. Ainsi, la fonction $f(x) = \sin x$ admet un maximum en les points $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.*

**Définition 3.5.** *(Fonction monotone)*
*Soit $f$ une fonction réelle définie sur un $D$. On dit que $f$ est :*

- *croissante sur $D$ si : $\forall x_1, x_2 \in D, x_2 =\geq x_1 \Longrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.*
- *strictement croissante sur $D$ si : $\forall x_1, x_2 \in D, x_2 > x_1 \Longrightarrow f(x_2) > f(x_1)$.*
- *décroissante sur $D$ si : $\forall x_1, x_2 \in D, x_2 \geq x_1 \Longrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.*
- *strictement décroissante sur $D$ si : $\forall x_1, x_2 \in D, x_2 > x_1 \Longrightarrow f(x_2) < f(x_1)$.*
- *est monotone si elle est ou bien croissante ou bien décroissante. Elle est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

**Exemple 3.5.**

1. *La fonction $f(x) = 2x+1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a :*
$$x_2 > x1 \Longrightarrow 2x_2 > 2x_1 \Longrightarrow 2x_2 + 1 > 2x_1 + 1 \Longrightarrow f(x_2) > f(x_1).$$
2. *$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a :*
$$x_2 > x_1 \Longrightarrow x_2^2 > x_1^2 \Longrightarrow x_2^2 + 1 > x_1^2 + 1 \Longrightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

### 3.1.2 Opérations sur les fonctions

**Définition 3.6.** *(Opérations)*
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $I$. On définit alors :*

– *la somme de $f$ et $g$ : $\forall x \in I,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.*

– *le produit de $f$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ : $\forall x \in I,\ (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$.*

– *le produit de $f$ et $g$ : $\forall x \in I,\ (fg)(x) = f(x) \times g(x)$.*

– *l'inverse de $f$, pour une fonction $f$ non nulle sur $I$ : $\forall x \in I, \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.*

– *la valeur absolue de $f$ : $\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|$.*

– *une relation d'ordre : $f \leq g$ sur $I \Longleftrightarrow \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$.*

**Définition 3.7.** *(Composition)*
*Soit une fonction réelle $f$ définie sur $I$ et une fonction $g$ telle que $g$ soit définie sur $f(I)$. On définit la composition de $f$ et $g$, notée $g \circ f$ par $\forall x \in I,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

**Exemple 3.6.**

1. *Soit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $g(x) = \sin x$, alors on $D_f = [-1,\ 1]$ et $D_g = \mathbb{R}$ et donc la fonction $h = f \circ g$ est définie pour tout $x \in D_h = \mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$, par contre la fonction $t = g \circ f$ n'est définie que pour $x \in D_t = [-1,\ 1]$ et $t(x) = \sin(\sqrt{1-x^2})$.*
2. *Soit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$, alors on $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}^*$ et donc la fonction $h = f \circ g$ est définie pour tout $x \neq 0$ par $h(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Par contre la fonction $t = g \circ f$ est définie par et $t(x) = \sqrt{1+x^2}$ pour tour réel $x$.*

## 3.2 Limite d'une fonction

### 3.2.1 Définitions

**Définition 3.8.** *Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de $x_0$ tout intervalle de la forme $]x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$. Généralement, un voisinage de $x_0$ est noté $\mathcal{V}(x_0)$ ou $\mathcal{V}_{x_0}$ ou tout simplement $\mathcal{V}$.*

**Définition 3.9.** *Soit $f$ une fonction définie au voisinage du point $x_0$, sauf peut être en $x_0$. On dit que :*

– *$f$ admet une limite $l$ lorsque $x$ tend vers $x_0$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon > 0;\ |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

*On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0} f(x) = l$.*

– *$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $x_0$ si et seulement si*

$$\forall K > 0,\ \exists \eta_K > 0;\ |x - x_0| < \eta_K \Longrightarrow f(x) > K.$$

*On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x_0} f(x) = +\infty$.*

– *$f$ admet une limite $l$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K > 0;\ x > K \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

*On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{+\infty} f(x) = l$.*

– *$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$ si et seulement si*

$$\forall K > 0,\ \exists M > 0;\ x > M \Longrightarrow f(x) > K.$$

*On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.*

**Remarque 3.2.** *On définit de façon similaire $\lim\limits_{x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f(x) = l$, $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$.*

**Exemple 3.7.**

1. *Soit $f(x) = x$, il est facile d'établir que $\lim\limits_{\alpha} f(x) = \alpha$ pour tout réel $\alpha$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$.*
2. *Soit $f(x) = x^2$, il est facile d'établir que $\lim\limits_{\alpha} f(x) = \alpha^2$ pour tout réel $\alpha$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$.*
3. *Soit $f(x) = e^{-x}$, On peut établir que $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$.*
4. *Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, On peut établir que $\lim\limits_{0} f(x) = +\infty$.*

**Définition 3.10.** *(limite à droite, limite à gauche)*
*Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ sauf peut être en $x_0 \in I$. On dit que $f$ admet une limite $l$ :*

– *à gauche en $x_0$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon > 0;\ x_0 - \eta_\varepsilon < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

*On note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0^-} f(x) = l$.*

– *à droite en $x_0$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon > 0;\ x_0 < x < x_0 + \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

*On note* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ *ou* $\lim\limits_{x_0^+} f(x) = l$.

**Définition 3.11.** *(limite par valeurs supérieures ou inférieures)*
*Soit $f$ une fonction de limite $l$ en $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ tend vers $l$ par valeurs supérieurs (respectivement inférieurs) quand $x$ tend vers $x_0$ si, au voisinage de $x_0$, $f(x) \geq l$ (resp $f(x) \leq l$). On peut alors éventuellement noter $\lim\limits_{x_0} f(x) = l^+$ (respectivement $\lim\limits_{x_0} f(x) = l^-$).*

**Proposition 3.1.** *La limite d'une fonction $f$ en un point $x_0$ est unique.*

**Proposition 3.2.** *Une fonction $f$ admet une limite $l$ en $x_0$ si et seulement si elle admet $l$ comme limite à gauche et à droite en $x_0$, i.e.,*

$$\lim_{x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x_0^-} f(x) = \lim_{x_0^+} f(x) = l.$$

### 3.2.2 Limites usuelles

Ci-dessous, une liste (non exhaustive) de limites que l'on doit connaître et dont l'usage ne nécessite pas d'explications. La justification de ces limites sera donnée ultérieurement.

**Limites en 0**

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{0} x^n = 0.$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty.$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n = 2p \\ -\infty \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}.$
- $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty.$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{*+},\ \lim\limits_{0^+} x^\alpha \ln x = -\infty.$
- $\lim\limits_{0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

**Limites en $\pm\infty$**

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{+\infty} x^n = +\infty,$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0,$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n = 2p \\ -\infty \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}.$
- $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\tan x}{x} = +\infty,$
- $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\tan x}{x} = -\infty,$
- $\lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty,$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{*+},\ \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$
- $\lim\limits_{-\infty} x^\alpha e^x = 0$
- $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$

### 3.2.3 Opérations sur les limites

**Proposition 3.3.** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions réelles définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ et admettant au point $x_0$ les limites $l$ et $l'$ respectivement. Alors*

- $\lim\limits_{x_0}(f+g)(x) = \lim\limits_{x_0} f(x) + \lim\limits_{x_0} g(x) = l + l^{'}$.
- $\lim\limits_{x_0}(\lambda f)(x) = \lambda \lim\limits_{x_0} f(x) = \lambda \cdot l$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x_0}(fg)(x) = \lim\limits_{x_0} f(x) \times \lim\limits_{x_0} g(x) = l \cdot l^{'}$.
- $\lim\limits_{x_0}(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{\lim\limits_{x_0} f(x)}{\lim\limits_{x_0} g(x)} = \dfrac{l}{l'}$, *si* $l^{'} \neq 0$.
- $\lim\limits_{x_0} |f|(x) = |\lim\limits_{x_0} f(x)| = |l|$.

**Remarque 3.3.**

1. *Dans la proposition précédente* $x_0 \in \bar{\mathbb{R}} = [-\infty + \infty]$ *et peut donc prendre une valeur finie ou les valeurs* $+\infty$ *ou* $-\infty$. *Il en est de même pour* $l$ *et* $l^{'}$. *Ainsi en tenant compte des règles de calcul dans* $\bar{\mathbb{R}}$, *on a :*
   - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ *et* $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
   - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$ *et* $(-\infty) \times (+\infty) = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$.
   - $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha + (+\infty) = +\infty$ *et* $\alpha + (-\infty) = -\infty$.
   - $\forall \alpha > 0$, $\alpha \times (+\infty) = +\infty$ *et* $\alpha \times (-\infty) = -\infty$.
   - $\forall \alpha < 0$, $\alpha \times (+\infty) = (-\infty)$ *et* $\alpha \times (-\infty) = +\infty$.
   - $\dfrac{1}{+\infty} = 0^{+}$, $\dfrac{1}{-\infty} = 0^{-}$, $\dfrac{1}{0^{+}} = +\infty$ *et* $\dfrac{1}{0^{-}} = -\infty$.
2. *Les expressions* $0 \times (+\infty)$, $0 \times (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\infty^0$, $1^\infty$ *qu'on appelle formes indéterminées, n'ont pas de valeur prédéfinie. Le résultat d'une forme indéterminée dépend des expressions rencontrées.*

**Proposition 3.4.**

1. *Soit* $f$ *et* $g$ *deux fonctions réelles définies sur un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* $x_0$. *Alors,*

   *si* $\forall x \in \mathcal{V}$, $f(x) \leq g(x)$ *alors* $\lim\limits_{x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x_0} g(x)$. ***(Théorème de comparaison)***.

2. *Soit* $f$, $g$ *et* $h$ *trois fonctions réelles définies sur un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* $x_0$. *Alors,*

   *si* $\forall x \in \mathcal{V}$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *et* $\lim\limits_{x_0} f(x) = \lim\limits_{x_0} h(x) = l$ *alors* $\lim\limits_{x_0} g(x) = l$. ***(Théorème des gendarmes)***.

## 3.3 Continuité d'une fonction

### 3.3.1 Définitions

**Définition 3.12.** *(continuité)*
*Soient* $f$ *une fonction réelle et* $x_0 \in D_f$ *ou* $D_f$ *est le domaine de définition de* $f$. *On dit que* $f$ *est*
- *continue en* $x_0$ *si* $f$ *admet* $f(x_0)$ *comme limite en* $x_0$. *Autrement dit*
  $$f \text{ est continue en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x_0} f(x) = f(x_0).$$
- *continue sur son domaine de définition si et seulement si* $f$ *est continue en tout point* $x_0 \in D_f$.

- *continue à droite en $x_0$ si $f$ admet $f(x_0)$ comme limite en $x_0^+$.*
- *continue à gauche en $x_0$ si $f$ admet $f(x_0)$ comme limite en $x_0^-$.*

**Exemple 3.8.**

1. *Les fonctions trigonométriques $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*
2. *La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. cette fonction n'étant pas continue en 0 car $\lim_{0^+} f(x) = +\infty$.*
3. *On peut vérifier que la fonction $E : x \mapsto E(x)$ (dite fonction partie entière) est continue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.*

**Définition 3.13.** *(Prolongement par continuité)*
*Soient $x_0 \in I$ et $f$ est une fonction définie sur $I - \{x_0\}$ vérifiant $\lim\limits_{x_0} f(x) = a$. On dit que $g$ est un prolongement par continuité de $f$ en $x_0$ si et seulement si $g(x) = f(x)$, $\forall x \neq x_0$ et $g(x_0) = a$.*

**Exemple 3.9.**

1. *Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Alors, la fonction $g$ définie par $g(x) = f(x)$, $\forall x \neq 0$ et $g(0) = 1$ est un prolongement par continuité de $f$ en 0.*
2. *Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = e^{\frac{x-2}{(x-1)^2}}$. On voit que $\lim\limits_{1} f(x) = 0$ et donc si on pose $g(x) = f(x)$, $\forall x \neq 1$ et $g(1) = 0$ alors $g$ est un prolongement par continuité de $f$ en 1.*

**Définition 3.14.** *(Restriction d'une fonction)*
*Soit $f$ une fonction réelle ayant $D_f$ pour domaine de définition. Soit $D$ une partie de $D_f$ . La fonction $f_D$ définie sur $D$ par $\forall x \in D, f_D(x) = f(x)$ s'appelle la restriction de $f$ à $D$.*

**Proposition 3.5.**
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues $x_0$. Alors*

1. *$f + g$ et $f \cdot g$ sont continues en $x_0$.*
2. *Si $g(x) \neq 0$ au voisinage de $x_0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en $x_0$.*
3. *Si $f$ est continue en $x_0$ et $g$ est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en $x_0$.*

**Exemple 3.10.**

1. *Les fonctions polynômes $p : x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*
2. *Les fonctions rationnelles $r : x \mapsto r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (où $p$ et $q$ sont des fonctions polynomiales) sont continues en tout point $x_0$ tel que $q(x_0) \neq 0$.*
3. *Les fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto e^x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*
4. *La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.*
5. *Les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont respectivement continues sur $]0,\ +\infty[$ et $[0,\ +\infty[$.*

### 3.3.2 Propriétés des fonctions continues

**Proposition 3.6.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors*

- *$f$ a un maximum $M$ et un minimum $m$ sur $[a, b]$.*
- *l'image de l'intervalle $[a, b]$ par une $f$ est l'intervalle $[m, M]$ où $m = \min_{x\in[a, b]} f(x)$ et $M = \max_{x\in[a, b]} f(x)$.*

**Théorème 3.1.** *(Théorème des valeurs intermédiaires)*
*Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \le f(b)$. Alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$ il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.*

**Remarque 3.4.** *Le résultat du théorème précédent reste vrai pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a) \ge f(b)$. Dans ce cas, pour tout $y \in [f(b), f(a)]$ il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.*

**Théorème 3.2.** *(Théorème de Bolzano)*
*Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) \le 0$, alors il existe au moins un réel $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = 0$.*

**Définition 3.15.** *(injectivité, surjectivité, bijectivité)*

- *Une application $f : E \to F$ est injective si tout élément de $F$ a au plus un antécédent par $f$, i.e.,*

$$\forall x_1, x_2 \in E, \ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

- *Une application $f : E \to F$ est surjective si tout élément de $F$ a au moins un antécédent par $f$, i.e.,*

$$\forall y \in F \ \exists x \in E, \ y = f(x).$$

- *Une application $f : E \to F$ est bijective si elle est à la fois injective et surjective, i.e.,*

$$\forall y \in F \ \exists! x \in E, \ y = f(x).$$

**Proposition 3.7.** *(Fonction réciproque)*
*Soit une application bijective $f : E \to F$. Il existe alors une unique application notée $f^{-1} : F \to E$ telle que $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$. L'application $f^{-1}$ est appelée application réciproque de $f$.*

**Proposition 3.8.** *(Fonction réciproque et monotonie)*
*Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Si $f$ est continue et strictement monotone sur $I$ alors $f$ réalise une bijection de $I$ dans $f(I)$.*

### 3.3.3 Fonctions uniformément continues

**Définition 3.16.** *Soit $D \subset \mathbb{R}$, et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ est uniformément continue sur $D$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, x' \in D, \ |x - x'| \le \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \le \varepsilon.$$

**Remarque 3.5.** *Il est immédiat que l'uniforme continuité de $f$ sur $D$ entraîne sa continuité en tout point de $D$. La réciproque n'est pas toujours vraie, mais nous avons le théorème suivant.*

**Théorème 3.3.** *(Heine)*
*Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur $I$. Alors $f$ est uniformément continue sur $I$.*

**Définition 3.17.** *(Fonction lipschitzienne)*
*Soit $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ est*

- *$k$-lipschitzienne sur $D$ si $\forall x, x' \in D$, $|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$.*
- *$k$-contractante sur $D$ si $f$ est $k$-lipschitzienne et $k \in [0, 1[$.*

**Proposition 3.9.** *Soit $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction $k$-lipschitzienne sur $D$. Alors $f$ est uniformément continue sur $D$.*

### 3.3.4 Fonctions continues et suites de réels

**Proposition 3.10.** *Soit $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f$ définie au voisinage de $x_0 \in D$. Alors $f$ est continue en $x_0$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)$ de réels convergeante vers $x_0$, la suite de réels $(f(u_n))$ -définie à partir d'un certain rang- converge vers $f(x_0)$.*

**Proposition 3.11.** *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant $f([a, b]) \subset [a, b]$. Soit $\alpha \in [a, b]$ et $(u_n)$ la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

*Alors si la suite $(u_n)$ converge, elle converge vers un point fixe de $f$ dans l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire un point $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.*

**Théorème 3.4.** *(Théorème du point fixe)*
*Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant $f([a, b]) \subset [a, b]$ et $f$ contractante de rapport $k \in [0,1[$. Soit $\alpha \in [a, b]$ et $(u_n)$ la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

*Alors la suite $(u_n)$ converge vers l'unique point fixe de $f$ dans l'intervalle $[a, b]$.*

**Remarque 3.6.** *Soit $f$ une fonction dérivable sur $[a, b]$ tel que $|f'(x)| \leq K$, $\forall x \in [a, b]$ où $K \in [0, 1[$, alors $f$ est $K$-contractante sur $[a, b]$.*

# Chapitre 4

# Fonctions réelles. Dérivabilité

## 4.1 Fonctions dérivables

### 4.1.1 Définitions

**Définition 4.1.** *Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in I$ où $I \subset D_f$ et $D_f$ étant le domaine de définition de $f$. On dit que $f$ est dérivable en $x_0$, si le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $x_0$. On écrit alors :*

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

*Le nombre $f^{'}(x_0)$ est appelée nombre dérivée de $f$ en $x_0$ ou la dérivée de $f$ en $x_0$.*

**Exemple 4.1.**

1. *La fonction $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, et on a $f^{'}(x_0) = nx^{n-1}$. En effet*

$$\lim_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \lim_{x_0} x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}.$$

2. *La fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, et on a $\cos^{'} x_0 = \sin x_0$. En effet*

$$\lim_{x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0} = \frac{-2\sin(\frac{x+x_0}{2})\sin(\frac{x-x_0}{2})}{x-x_0} = \lim_{x_0} \sin(\frac{x+x_0}{2}) \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} = \sin x_0.$$

**Interprétation géométrique.** Dire que $f$ est dérivable en $x_0$, c'est dire que la courbe $(C_f)$ de $f$ présente au point $A = (x_0, f(x_0))$ une tangente $(\Delta)$ non verticale d'équation $y = f(x_0) + (x - x_0)f^{'}(x_0)$.

**Remarque 4.1.** *En posant $x = x_0 + h$ alors $x \longrightarrow x_0 \Longleftrightarrow h \longrightarrow 0$ et $f^{'}(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.*

**Définition 4.2.** *(fonction dérivée)*
*On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $D$ si $f$ est dérivable en tout point de $D$ et on définit sa fonction dérivée $f^{'}$ par :*

$$\begin{array}{rccc} f^{'} : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{'}(x) \end{array}$$

**Définition 4.3.** *Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in I$ où $I \subset D_f$ et $D_f$ étant le domaine de définition de $f$. On dit que $f$*

- *est dérivable à droite en $x_0$, si le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $x_0^+$. On écrit alors*
$$f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad ou \quad f'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$
- *est dérivable à gauche en $x_0$, si le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $x_0^-$. On écrit alors*
$$f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad ou \quad f'_g(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

**Remarque 4.2.**

1. *Si $f$ est dérivable à droite et à gauche d'un point $x_0$ et si $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.*
2. *Une fonction $f$ peut être dérivable à droite et à gauche d'un point $x_0$ sans qu'elle soit dérivable en $x_0$ comme c'est le cas de la fonction $x \longrightarrow |x|$ en $x_0 = 0$.*

### 4.1.2 Propriétés

**Proposition 4.1.** *Si $f$ est dérivable en $x_0$ alors $f$ est continue en $x_0$.*

**Remarque 4.3.**

1. *La réciproque de la propriété précédente est fausse. En effet, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0 puisque $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & si \quad x>0 \\ -1 & si \quad x<0. \end{cases}$*
2. *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est un autre exemple de fonction continue en 0 mais non dérivable en 0.**
3. *Il est possible de construire des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point de leur domaine de définition.*

**Proposition 4.2.** *Soit $f$ une fonction réelle admettant un extremum local en $x_0$. Si $f$ est dérivable en $x_0$, alors $f'(x_0) = 0$.*

**Remarque 4.4.**

1. *La réciproque de la proposition précédente n'est pas toujours vraie. En effet, pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local.*
2. *Les extremums locaux d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$ sont à rechercher : parmi les points où $f$ n'est pas dérivable, parmi les extrémités de $I$ et parmi les points intérieurs à $I$ où $f$ est de dérivée nulle.*

**Proposition 4.3.**

- *Si $f$ est dérivable sur $D$ alors $\alpha \cdot f$ est dérivable sur $D$ pour tout réel $\alpha$ et on a*
$$(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f'.$$

- *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions dérivables sur $D$, alors $f+g$ et $fg$ sont dérivables sur $D$ et on a*

$$(f+g)^{'}=f^{'}+g^{'} \text{ et } (f\cdot g)^{'}=f^{'}\cdot g+f\cdot g^{'}.$$

- *Si $f$ ne s'annule pas sur $D$ et $f$ est dérivable sur $D$, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur $D$ et on a*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{'}=\frac{-f^{'}}{f^2}.$$

- *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions dérivables sur $D$ et $g$ ne s'annule pas sur $D$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $D$ et on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}=\frac{f^{'}g-fg^{'}}{g^2}.$$

**Proposition 4.4.** *Soit $f$ une fonction dérivable sur $D$ et $g$ une fonction dérivable sur $f(D)$, alors $g\circ f$ est dérivable sur $D$ et on a :*

$$(g\circ f)^{'}=g^{'}(f)\cdot f^{'}.$$

### 4.1.3 Dérivées successives

**Définition 4.4.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. On pose $f^{(0)}=f$ et $f^{(1)}=f^{'}$ la dérivée première de $f$. Par récurrence, en supposant que $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable dans $I$, on définit $f^{(n)}=(f^{(n-1)})^{'}$.*
*Si la fonction $f^{(n)}$ existe, on dit que $f$ est $n$ fois dérivable sur l'intervalle $I$.*

**Définition 4.5.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n$ fois dérivable sur $I$. Si de plus $f^{(n)}$ est continue sur $I$, on dit que $f$ est de classe $C^n$ sur $I$. On note $C^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $C^n$ de $I$ dans $\mathbb{R}$.*
*On dit que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$ si $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ pour tout entier naturel $n$. On note $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.*

**Remarque 4.5.**

1. *L'ensemble $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions réelles continues sur $I$.*
2. *On vérifie l'équivalence suivante :*

$$f^{(n)}\equiv 0 \Longleftrightarrow f \text{ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à } n-1 \text{ sur } I.$$

**Théorème 4.1.** *(formule de Leibniz)*
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables $n$ fois sur un intervalle $I$. Alors le produit des deux fonctions $f$ et $g$ est $n$ fois dérivable et on a :*

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f^{(k)}g^{(n-k)}.$$

## 4.2 Théorème de Rolle et accroissements finis

**Théorème 4.2.** *(théorème de Rolle)*
*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,\ b]$ telle que $f$ est dérivable sur $]a,\ b[$ et $f(a)=f(b)$. Alors, il existe $c\in]a,\ b[;\ f^{'}(c)=0$.*

**Théorème 4.3.** *(Théorème des Accroissements Finis (TAF))*
- ***Première forme :*** *Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[a,\ b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,\ b[$. Alors, il existe $c \in ]a,\ b[;\ f^{'}(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*
- ***Deuxième forme :*** *Soit $f$ une fonction continue sur $[a,\ a+h]$ (où $h>0$) et dérivable sur $]a,\ a+h[$. Alors, il existe $\theta \in ]0,\ 1[;\ f(a+h)-f(a) = hf^{'}(a+\theta h)$.*

**Exemple 4.2.** *Utilisons le théorème des accroissements finis pour donner une majoration de l'erreur absolue commise lorsqu'on remplace $\sqrt{401}$ par 20.*

*Pour cela, appliquons le TAF à la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ entre 400 et 401. Il vient que : $\sqrt{401}-20 = \frac{1}{2}\sqrt{400+\theta}$, où $\theta \in ]0,\ 1[$. On conclue alors que 20 est une valeur approchée "par défaut" de $\sqrt{401}$. L'erreur absolue commise étant inférieur à $\frac{1}{40}$.*

**Proposition 4.5.** *Soit $f$ une fonction continue sur $[a,\ b]$ dérivable sur $]a,\ b[$, alors :*
- $\forall x \in ]a,\ b[,\ f^{'}(x) > 0 \Longrightarrow f$ *est strictement croissante sur $I$.*
- $\forall x \in ]a,\ b[,\ f^{'}(x) < 0 \Longrightarrow f$ *est strictement décroissante sur $I$.*
- $\forall x \in ]a,\ b[,\ f^{'}(x) = 0 \Longleftrightarrow f$ *est constante sur $I$.*

**Remarque 4.6.** *Les réciproques des deux premières propriétés de la proposition précédente sont fausses.*

**Proposition 4.6.** *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f$ une fonction continue sur $I = ]x_0-h,\ x_0+h[$ et dérivable sur $I-\{x_0\}$, alors*

$$\lim_{x_0} f^{'}(x) = l \Longrightarrow \lim_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l.$$

**Remarque 4.7.** *La réciproque de la proposition précédente est fausse.*

*En effet, la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2\sin(\dfrac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0)=0$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a $f^{'}(x) = 2x\sin(\dfrac{1}{x}) - \cos(\dfrac{1}{x})$ pour tout réel $x$ non nul. De plus, $\lim\limits_{0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{0} x\sin(\dfrac{1}{x}) = 0$ et $\lim\limits_{0} f^{'}(x)$ n'existe pas.*

**Corolaire 4.1.** *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f$ une fonction continue sur $I = ]x_0-h,\ x_0+h[$, dérivable sur $I-\{x_0\}$ et vérifiant $\lim\limits_{x_0} f^{'}(x) = l \in \mathbb{R}$, alors $f$ est dérivable en $x_0$ avec $f^{'}(x_0) = l$ et de plus $f^{'}$ est continue en $x_0$.*

**Corolaire 4.2.** *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f$ une fonction continue sur $I = ]x_0-h,\ x_0+h[$, dérivable sur $I-\{x_0\}$ et telle que $f^{'}$ admet une limite infinie en $x_0$, alors $f$ n'est pas dérivable en $x_0$ et la courbe $C_f$ de $f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse $x_0$.*

**Théorème 4.4.** *(Théorème des Accroissements Finis Généralisé (TAFG))*
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,\ b]$, dérivables sur $]a,\ b[$ vérifiant $g(a) \neq g(b)$ et $\forall x \in ]a,\ b[,\ g^{'}(x) \neq 0$. Alors, il existe $c \in ]a,\ b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}$.*

**Corolaire 4.3.** *(Règle de l'Hospital)*
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $I = [x_0 - h,\ x_0 + h]$ (où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$), dérivables sur $I - \{x_0\}$ vérifiant $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $\forall x \in I - \{x_0\}, g(x) \neq 0$ et $g^{'}(x) \neq 0$. Alors,*

$$\lim_{x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l \Longrightarrow \lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

**Remarque 4.8.**

1. *La règle de l'Hospital permet de lever (parfois) des formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ dans le cas où $f$ et $g$ tendent toutes les deux vers 0 en $x_0$, ou vers $\pm\infty$, et si le rapport $\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ admet une limite finie ou égale à $\pm\infty$ en $x_0$.*

2. *La réciproque du corolaire précédent est fausse.*

**Exemple 4.3.**

1. $\lim\limits_{0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

2. $\lim\limits_{0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1 - \alpha x}{x^2} = \lim\limits_{0} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha}{2x} = \lim\limits_{0} \frac{(\alpha-1)\alpha(1+x)^{\alpha-2}}{2} = \frac{(\alpha-1)\alpha}{2}$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

## 4.3 Formule de Taylor-Young

### 4.3.1 Développement de Taylor-Young d'une fonction

**Définition 4.6.**

- *On dit que la fonction $f$ vérifie les conditions de Taylor-Young à l'ordre* 0 *au point $x_0 \in \mathbb{R}$, si $f$ est continue en $x_0$.*

- *On dit que la fonction $f$ vérifie les conditions de Taylor-Young à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au point $x_0 \in \mathbb{R}$, si il existe un intervalle ouvert $I = ]x_0 - h,\ x_0 + h[$ tel que $f$ soit $(n-1)$ fois dérivable sur $I$ et $f^{(n-1)}$ étant dérivable en $x_0$.*

**Remarque 4.9.** *Une fonction de classe $C^n$ sur $I$ vérifie les conditions de Taylor-Young à l'ordre $n$, en $x_0 \in I$.*

**Théorème 4.5.** *Si $f$ vérifie les conditions de Taylor-Young à l'ordre $n \in \mathbb{N}$, au point $x_0 \in I$, alors il existe une fonction $\varepsilon$ vérifiant $\lim\limits_{x_0} \varepsilon(x) = 0$ et telle que*

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f^{'}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{''}(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x).$$

**Vocabulaire et Notation.**

- Le développement de $f$ obtenu ci-dessus est appelé Développement de Taylor-Young de $f$ à l'ordre $n$ en $x_0$. On le note $DTY_n(x_0)$.
- La partie polynomiale de ce développement est appelée partie régulière (ou principale).
- $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est appelé terme complémentaire.

- Un développement de Taylor-Young de $f$ écrit en $x_0 = 0$ est appelé développement de Taylor-MacLaurin. Ce développement s'écrit :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x).$$

**Exemple 4.4.** *Soit $n$ un entier naturel donné, on peut vérifier que le $DTY_n(0)$ (ou le développement de Taylor-MacLaurin) est donné pour quelques fonctions usuelles par :*

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
2. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x), \quad \forall x > -1.$
3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

### 4.3.2 Dérivation et intégration de $DTY$

**Théorème 4.6.** *La partie régulière du $DTY_n(x_0)$ de $f'$ s'obtient en dérivant la partie régulière du $DTY_{n+1}(x_0)$ de $f$, i.e., si*

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + (x-x_0)^{n+1} \varepsilon_1(x).$$

*alors*

$$\forall x \in I,\ f'(x) = f'(x_0) + (x-x_0) f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f'''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon_2(x).$$

**Exemple 4.5.**

1. *Considérons le $DTY_{2n+1}(0)$ de $f(x) = \sin x$ donné par :*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   *On voit alors qu'en dérivant, on a :*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

   *et on retrouve le $DTY_{2n}(0)$ de $\cos x$.*

2. *Sachant que le $DTY_5(0)$ de $f(x) = \tan x$ est donné par :*

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + x^5 \varepsilon_1(x).$$

   *On obtient en dérivant :*

$$\tan^2 x = x^2 + \frac{2}{3} x^4 + x^4 \varepsilon_2(x).$$

   *qui correspond au $DTY_4(0)$ de la fonction $f(x) = \tan^2(x)$.*

**Théorème 4.7.** *La partie régulière du $DTY_n(x_0)$ de $F$ la primitive de $f$ qui s'annule en $x_0$ s'obtient en intégrant la partie régulière du $DTY_{n-1}(x_0)$ de $f$, plus précisément., si*

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f^{'}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f^{''}(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) + (x-x_0)^{n-1}\varepsilon_1(x).$$

*alors*

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx = (x-x_0)f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}f^{'}(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n-1)}(x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon_2(x).$$

**Exemple 4.6.** *En prenant $\alpha = -1$ dans le $DTY_{n-1}(0)$ de $f(t) = (1+t)^\alpha$, on a :*

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + t^{n-1}\varepsilon(t),\ \forall t > -1,$$

*d'ou en intégrant, on a :*

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x),\ \forall x > -1.$$

## 4.4 Développements limités

### 4.4.1 Notions sur les développements limités

**Définition 4.7.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $x_0 \in I$. On dit que $f$ possède un développement limité d'ordre $n$ en $x_0$ (qu'on note $DL_n(x_0)$), s'il existe un polynôme $P_n$ de degré inférieur ou égal à $n$ et une fonction $\varepsilon$ de limite nulle en $x_0$ tels que*

$$f(x) = P_n(x-x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x),\ \forall x \in I - \{x_0\},$$

*i.e., il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $\varepsilon$ de limite nulle en $x_0$ tels que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i + (x-x_0)^n\varepsilon(x).$$

**Remarque 4.10.**

1. *Dire que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$ signifie qu'il existe des reels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que*

$$\lim_{x_0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

   *On voit donc que plus $n$ est grand meilleure est donc l'approximation de $f(x)$ par le polynôme $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$ au voisinage de $x_0$.*

2. *Un développement de Taylor-Young ($DTY$) est un développement limité (DL) mais la réciproque n'est pas vraie. En effet, considérons par exemple la fonction $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3\sin(\frac{1}{x})$. Cette fonction a un développement limité à l'ordre 2 en 0 puisque*

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x),\ \textit{où}\ \varepsilon(x) = x\sin(\frac{1}{x}).$$

   *En calculant la dérivée de $f$ , on a :*

$$f^{'}(x) = 1 + 2x + 3x^2\sin(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x}) = 1 + x(2 - \cos(\frac{1}{x})) + 3x^2\sin(\frac{1}{x}).$$

   *Mais $f$ n'a pas de dérivée seconde en 0 car $\dfrac{f^{'}(x)-1}{x} = 2 - \cos(\frac{1}{x}) + 3x\sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite quand $x$ tend vers 0.*

3. *Pour tout $x$ proche de $x_0$ (i.e. $x \in \mathcal{V}_{x_0}$ un voisinage de $x_0$), le terme complémentaire $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ est négligeable devant n'importe quel monôme de la partie régulière $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$.*

4. *La fonction $x \longmapsto f(x)$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de $x_0$ si et seulement si la fonction $h \longmapsto f(x_0+h)$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de 0. En effet : Si l'on pose $x = x_0 + h$, on a*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x).$$

*équivaut à*

$$f(x_0+h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \ldots + a_nh^n + h^n\varepsilon(x_0+h).$$

*et $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend $x_0$ si et seulement si $\varepsilon(x_0+h)$ tend vers 0 quand $h$ tend vers 0. Ainsi, dans la suite de ce chapitre, on ne considèrera plus, sauf indication contraire, que des développements limités au voisinage de 0.*

5. *Supposons que $f$ admette un $DL_n(x_0)$ et soit $p \leq n$, $p \in \mathbb{N}$. Alors $f$ admet un $DL_p(x_0)$ obtenu par troncature. plus précisément, si $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon_1(x)$ alors $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_p(x-x_0)^p + (x-x_0)^p\varepsilon_2(x)$.*

**Proposition 4.7.** *La partie régulière (principale) du développement limité d'une fonction $f$ est unique. i.e., les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ du $DL_n(x_0)$ d'une fonction sont définis de façon unique.*

**Corolaire 4.4.** *Si une fonction $f$ est paire (respectivement impaire), alors la partie régulière de son $DL_n(0)$ ne contient que des monômes d'exposant pair (respectivement impair).*

**Proposition 4.8.** *Soit $f$ une fonction admettant le développement limité $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x)$ et soit $m$ le plus petit indice vérifiant $a_m \neq 0$. Alors $f(x) \underset{x_0}{\approx} a_m(x-x_0)^m$. Inversement, si $f(x) \underset{x_0}{\approx} a_m(x-x_0)^m$ avec $m \in \mathbb{N}$, alors $\exists \varepsilon$, $f(x) = a_m(x-x_0)^m + (x-x_0)^m\varepsilon(x)$ et $\lim_{x_0} \varepsilon(x) = 0$.*

**Remarque 4.11.** *Dans la pratique, on utilisera souvent les équivalents dans la recherche des limites, et les développements limités lorsqu'on cherche plus de précision -par exemple non seulement l'existence d'une demi-tangente mais encore la position de la courbe par rapport à celle-ci- ou quand, il est difficile d'utiliser des équivalents (notamment dans les sommes).*

**Définition 4.8.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$). Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que $f$ possède un développement limité d'ordre $n$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $\varepsilon$ de limite nulle en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) tels que*

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{x^i} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n}, \ \forall x \in I.$$

**Remarque 4.12.**

1. *Pour calculer le développement limité d'une fonction $f$ en $\pm\infty$, on se ramène au calcul du développement limité de $f$ en 0 en posant $t = \dfrac{1}{x}$.*

2. *Un développement limité de la forme*

$$f(x) = a_{-p}x^{-p} + \ldots + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1}a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{0} \varepsilon(x) = 0,$$

*est appelé un développement limité généralisé.*

**Exemple 4.7.**

1. *Calculons le* $DL_4(\infty)$ *de* $f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$.
   *Réponse : Sachant que le* $DL_5(0)$ *de* $t \longmapsto e^t$ *est donné par :*
$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + t^5\varepsilon(t),$$
   *il vient que le* $DL_5(\infty)$ *de* $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}$ *est :*
$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!x^2} + \frac{1}{3!x^3} + \frac{1}{4!x^4} + \frac{1}{5!x^5} + \frac{1}{x^5}\varepsilon(x),$$
   *et donc le le* $DL_4(\infty)$ *de* $f$ *est*
$$f(x) = 1 + \frac{1}{2!x} + \frac{1}{3!x^2} + \frac{1}{4!x^3} + \frac{1}{5!x^4} + \frac{1}{x^4}\varepsilon(x),$$
2. *On a* $\sin x = 1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)$, *d'ou*
$$\frac{\sin x}{x^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + x^2\varepsilon(x),$$
   *est un développement généralisé de* $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x^3}$.

### 4.4.2 Développement limité des fonctions usuelles

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$.
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$.
- $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + x^{10}\varepsilon(x)$.
- $e^x = 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x), \quad \forall x > -1$.

### 4.4.3 Opérations sur les développements limités

**Proposition 4.9.** *Soient* $f$, $g : I \longmapsto \mathbb{R}$ *deux fonctions réelles définies sur* $I$ *et admettant chacune un* $DL_n(0)$ *donné par* $f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *et* $g(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon(x)$, $\forall x \in I$. *Alors*

- $f + g$ *admet un* $DL_n(0)$ *donné par* $(f+g)(x) = (P_n + Q_n)(x) + x^n\varepsilon(x)$.
- $\alpha \cdot f$ *admet un* $DL_n(0)$ *donné par* $(\alpha \cdot f)(x) = (\alpha \cdot P_n)(x) + x^n\varepsilon(x)$.
- $f \cdot g$ *admet un* $DL_n(0)$ *donné par* $(f \cdot g)(x) = T(x) + x^n\varepsilon(x)$, *où* $T(x)$ *est le polynôme de degré inférieur ou égal à* $n$ *obtenu par troncature du polynôme* $(P \cdot Q)(x)$.

**Exemple 4.8.**

1. *Soit la fonction* $f(x) = e^x + \sin x$. *Déterminons le* $DL_3(0)$ *de* $f$.
   *Comme* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$, *et* $\sin x = 1 - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$, *il vient que* $f(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$.

2. *Soit la fonction* $h(x) = e^x \sin x$. *Déterminons le* $DL_3(0)$ *de* $h$.
   *Pour cela, calculons le produit* $\pi(x)$ *des parties principales des* $DL_3((0)$ *de* $x \longmapsto e^x$ *et* $x \longmapsto \sin x$. *On a alors*

$$\pi(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}) \times (1 - \frac{x^3}{6}) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \dots,$$

   *et finalement on obtient :*

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

**Proposition 4.10.** *Soient* $f, g : I \longmapsto \mathbb{R}$ *deux fonctions réelles définies sur* $I$ *et admettant chacune un* $DL_n(0)$ *donné par*

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x) \quad et \quad g(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon(x), \ \forall x \in I.$$

*Si* $\lim_0 g(x) \neq 0$ *(c'est à dire si le terme constant de* $Q_n(x)$ *n'est pas nul), alors* $\frac{f}{g}$ *admet un* $DL_n(0)$ *donné par* $(\frac{f}{g})(x) = S(x) + x^n\varepsilon(x)$, *où* $S(x)$ *est le polynôme quotient, à l'ordre* $n$ *de la division suivant les puissances croissantes, de* $P_n(x)$ *par* $Q_n(x)$.

**Exemple 4.9.** *Soit à déterminer le* $DL_3(0)$ *de* $f$ *la fonction définie par* $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$.
*Pour cela effectuons la division suivant les puissances croissantes de* $P(x)$ *la partie principale du* $DL_3(0)$ *de* $x \longmapsto \sin x$ *(donnée par* $P(x) = 1 - \frac{x^3}{6}$*) par* $Q(x)$ *la partie principale du* $DL_3(0)$ *de* $x \longmapsto e^x$ *(donnée par* $Q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$*).*

$$\begin{array}{cccccc|cccc}
x & & -\frac{x^3}{6} & & & & 1 & +x & +\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{6} \\
x & +x^2 & +\frac{x^3}{2} & +\frac{x^4}{6} & & & - & - & - & - \\
 & -x^2 & -\frac{2x^3}{3} & -\frac{x^4}{6} & & & x & -x^2 & +\frac{x^3}{3} & \\
 & -x^2 & -x^3 & -\frac{x^4}{2} & -\frac{x^5}{6} & & & & & \\
 & & \frac{x^3}{3} & +\frac{x^4}{3} & +\frac{x^5}{6} & & & & & \\
 & & \frac{x^3}{3} & +\frac{x^4}{3} & +\frac{x^5}{6} & +\frac{x^6}{18} & & & & \\
 & & & & & -\frac{x^6}{18} & & & &
\end{array}$$

*Ainsi* $P(x) = Q(x)(x - x^2 + \frac{x^3}{3}) - \frac{x^6}{18}$. *Ce qui fait que le* $DL_3(0)$ *de* $f$ *est donnée par*

$$f(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

**Proposition 4.11.** *Soit $f$ une fonction continue en 0 et admettant un $DL_n(0)$ de partie principale $P_n(x)$ et $u$ une fonction admettant un $DL_n(0)$ de partie principale $Q_n(x)$ et tel que $\lim\limits_0 u(x) = 0$ (c'est à dire $Q_n(0) = 0$). Alors, $f \circ u$ admet un $DL_n(0)$ de partie principale $R(x)$ le polynôme de degré inférieur ou égal à n obtenu par troncature du polynôme $P(Q(x))$.*

**Exemple 4.10.** *Déterminons le $DL_3(0)$ de $f(x) = e^{\sin x}$.*
*On a $e^u = \underbrace{1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6}}_{=P(u)} + u^3\varepsilon(u)$. Or, $\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{=Q(x)} + x^3\varepsilon(x)$ (Notons que, $Q(0) = 0$).*
*Ainsi, $P(Q(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 0.x^3 + \ldots$, et donc le $DL_3(0)$ de $f(x) = e^{\sin x}$ est donné par*

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x).$$

## 4.5 Application des développements limités

### 4.5.1 Recherche de limites

Dans le cas où le calcul de $\lim\limits_{x_0} f(x)$ n'est pas simple, on peut utiliser les développements limités en respectant la démarche suivante :

1. On effectue un changement de variables $h = (x - x_0)$ où $h = \frac{1}{x}$ pour se ramener en 0 ;
2. si f est définie comme produit de fonctions, on cherche séparément un équivalent simple de chaque produit ;
3. un développement limité $h(x) = a_k x^k + x^k\varepsilon(x)$ avec $a_k \neq 0$ et $\lim\limits_0 \varepsilon(x) = 0$ donne l'équivalent $h(x) \sim a_k x^k$ ;
4. on peut sommer des DL, c'est leur principal avantage sur les équivalents.

**Exercice 4.1.** *Déterminer la limite quand x tend vers 0 de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1 - x\sin x - \cos x}{(e^x - 1)^2}$.*

**Réponse.** Commençons par chercher le monôme de plus petit degré qui soit un équivalent au numérateur de $f(x)$. Pour cela, on a

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \text{et} \quad x\sin x = x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

d'ou $1 - x\sin x - \cos x = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ et donc $1 - x\sin x - \cos x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
De même, cherchons le monôme de plus petit degré qui soit un équivalent au dénominateur de $f(x)$. On a alors $e^x - 1 = x + x\varepsilon(x)$, d'ou $(e^x - 1)^2 = x^2 + x^2\varepsilon(x)$ et donc $(e^x - 1)^2 \underset{0}{\sim} x^2$.
Ainsi, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$ et donc $\lim\limits_0 f(x) = -\frac{1}{2}$.

**Exercice 4.2.** *Déterminer la limite quand x tend vers 0 de la fonction $f$ définie par $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.*

**Réponse.** Commençons par simplifier l'expression de $f(x)$ en "éliminant la puissance $\frac{1}{x}$".
Pour cela, on a $f(x) = e^{\ln(f(x))} = e^{\frac{1}{x}\ln(\cos x)}$. Déterminons alors le monôme de plus petit degré qui soit un équivalent de $f(x)$. Pour cela, on a
$\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1))$, or $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$,

donc $\ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$. Ainsi $\dfrac{1}{x}\ln(\cos x) = -\dfrac{x}{2} + x^2\varepsilon(x)$,
et donc $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + x\varepsilon(x)$ et il en résulte que $\lim\limits_{0} f(x) = 1$.

### 4.5.2 Prolongement. Position locale par rapport à la tangente

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0,\ \alpha[$ ou $]\alpha,\ x_0[$ et admettant un développement limité en $x_0$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + x^k\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad a_k \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x_0}\varepsilon(x) = 0.$$

Alors :
- la fonction $f$ se prolonge par continuité en $x_0$ en posant $f(x_0) = a_0$.
- le prolongement de $f$ ainsi défini est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) = a_1$.
- l'équation de $(\mathcal{T})$ la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de $f$ en $x_0$ est donnée par $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.
- le signe de l'expression $a_k(x - x_0)^k$ permet de donner la position locale de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à sa tangente $(\mathcal{T})$.

**Exemple 4.11.**

1. *Etude locale en $x_0 = -1$ de la courbe d'équation $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x - 3}$.*

   *Posons $t = x - x_0 = x + 1$ et déterminons le développement limité à l'ordre 3 de $f(-1 + t)$ au voisinage de $t = 0$. On a alors*

   $$f(-1 + t) = \frac{-4 - 3t + t^2}{-4 + t^2} = 1 + \frac{3}{4}t + \frac{3}{16}t^3 + t^3\varepsilon(t), \quad \textit{avec} \quad \lim_{0}\varepsilon(t) = 0.$$

   *Ainsi, le développement limité à l'ordre 3 de $f(x)$ au voisinage de $x_0 = -1$ est :*

   $$f(x) = 1 + \frac{3}{4}(x + 1) + \frac{3}{16}(x + 1)^3 + (x + 1)^3\varepsilon'(x), \quad \textit{avec} \quad \lim_{-1}\varepsilon'(x) = 0.$$

   *On voit donc que la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $x_0 = -1$ à pour équation $Y = 1 + \frac{3}{4}(x+1)$, et comme $f(x) - Y \sim_{-1} \frac{3}{16}(x + 1)^3$ alors le point $(x_0, f(x_0)) = (-1, 1)$ est un point d'inflexion où $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus (respectivement en dessous) de $(\mathcal{T})$ à droite (respectivement à gauche) de $x_0 = -1$.*

2. *Etude locale en $x_0 = 0$ de la courbe d'équation $y = \sqrt[3]{1 + 2x} - \sqrt{4 + x}$.*

   *On a $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{3}} - 2(1 + \frac{x}{4})^{\frac{1}{2}}$ d'où le développement limité à l'ordre 2 de $f$ au voisinage de 0 est donné par*

   $$f(x) = -1 + \frac{5}{12}x - \frac{247}{576}x^2 + x^2\varepsilon(x), \quad \textit{avec} \quad \lim_{0}\varepsilon(x) = 0,$$

   *car $(1 + 2x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{9}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ et $(1 + \frac{x}{4})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{128} + x^2\varepsilon(x)$.*
   *Ainsi, l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point $M(x_0, f(x_0)) = (0, -1)$ est $y = -1 + \dfrac{5}{12}x$ et au voisinage de $M$, $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de $(\mathcal{T})$ car $f(x) - y \sim_0 -\frac{247}{576}x^2 < 0$.*

### 4.5.3 Etude des branches infinies

Pour étudier une branche infinie d'une courbe $y = f(x)$ en $\pm\infty$ :

1. on fait le changement de variables $h = \frac{1}{x}$.
2. on effectue un "développement généralisé" de $f(h)$ en 0 avec un terme significatif qui tend vers 0.
3. on revient à $f(x)$ pour obtenir un "développement asymptotique" que l'on interprète pour trouver l'équation d'une asymptote et la position locale de la courbe par rapport à l'asymptote.

**Exemple 4.12.**

1. *Etudions les branches infinies de la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x(1+e^{\frac{1}{x}})$.*

   *On a $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$ et comme au voisinage de $\pm\infty$ on a :*
   $$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x), \qquad \textit{avec} \quad \lim_{\pm\infty}\varepsilon(x) = 0,$$
   *alors*
   $$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x).$$
   *Ainsi, on en déduit que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 2x+1$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de $f$.*
   *De plus comme $f(x) - y = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon(x)$, on voit qu'au voisinage de $+\infty$, la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est au dessus de la droite $(\mathscr{D})$, alors qu'au voisinage de $-\infty$, la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est en dessous de la droite $(\mathscr{D})$.*

2. *Etudions les branches infinies de la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2\ln\left(\left|\dfrac{x+1}{x}\right|\right)$.*

   *Remarquons que $f$ peut être prolongé par continuité en $x_0 = 0$ en prenant $f(0) = 0$ car $\lim\limits_{0} x^2\ln\left(\left|\dfrac{x+1}{x}\right|\right) = 0$.*
   *Maintenant, soit $x$ "au voisinage de $\pm\infty$" et posons $h = \dfrac{1}{x}$ alors $h$ est au voisinage de 0 et comme $1+h$ est positif, alors*
   $$\ln(|1+h|) = \ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + h^3\varepsilon(h), \qquad \textit{avec} \quad \lim_{0}\varepsilon(h) = 0,$$
   *et donc*
   $$\frac{1}{h^2}\ln(|1+h|) = \frac{1}{h^2}\ln(1+h) = \frac{1}{h} - \frac{1}{2} + \frac{h}{3} + h\varepsilon(h),$$
   *c'est à dire que au voisinage de $\pm\infty$, on a*
   $$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$
   *Ainsi, la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de $f$.*
   *De plus comme $f(x) - y = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon(\dfrac{1}{x})$, on voit qu'au voisinage de $+\infty$, la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est au dessus de la droite $(\mathscr{D})$, alors qu'au voisinage de $-\infty$, la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est en dessous de la droite $(\mathscr{D})$.*

# Chapitre 5

# Fonctions trigonométriques, hyperboliques et réciproques

## 5.1 Résultat général

**Théorème 5.1.** *Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur $I$, alors*

1. *L'ensemble image $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*
2. *$f : I \longrightarrow J$ est une bijection et son application réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue sur $I$ et de plus strictement monotone et varie dans le même sens que $f$.*
3. *$f^{-1}$ est dérivable en tout point $y = f(x)$ tel que $f^{'}(x) \neq 0$ et on a $f^{-1^{'}}(y) = \dfrac{1}{f^{'}(x)} = \dfrac{1}{f^{'}(f^{-1}(y))}$.*
4. *Si $f^{'}(a) = 0$, alors $f^{-1}$ n'est pas dérivable en $b = f(a)$ et la courbe d'équation $y = f^{-1}(x)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse $b = f(a)$.*
5. *Dans un repère orthonormé, les courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = f^{-1}(x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

**Preuve.**

1. Résultat admis.
2. 
   - *Bijection.* Comme $J = f(I)$, alors $f$ est surjective de $I$ sur $J$. et comme de plus $f$ est strictement monotone alors $f$ est injective. Ainsi $f$ est bijective.
   - *Sens de variation de $f^{-1}$.* Soient $y,\ y^{'} \in J$, alors $\exists!,\ x,\ x^{'} \in I$ tels que $x = f(y)$ et $x^{'} = f(y^{'})$ et donc $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y^{'})}{y - y^{'}} = \dfrac{x - x^{'}}{f(x) - f(x^{'})}$. Ainsi $f^{-1}$ est strictement monotone et de plus $f$ et $f^{-1}$ ont le même sens de variation.
3. 
   - *Dérivabilité de $f^{-1}$.* Résultat admis.
   - *Dérivée de $f^{-1}$ en un point $y$ de $J$.* Soit $b,\ y \in J$ et posons $b = f(a)$ et $y = f(x)$,
     Comme $f$ est continue, alors $y$ tend vers $b$ si et seulement si $x$ tend vers $a$ et donc le rapport $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{x - a}{f(x) - f(a)}$ tend vers $\dfrac{1}{f^{'}(a)}$.

4. Soit $a \in I$ et $b = f(a) \in J$ tel que $f^{'}(a) = 0$, alors le rapport $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{x - a}{f(x) - f(a)}$ tend vers l'infini et comme $f^{-1}$ est continue en $b$, cela implique l'existence d'une tangente verticale.
5. C'est une conséquence du fait que $y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

## 5.2 Fonctions trigonométriques réciproques

### 5.2.1 Fonction Arcsinus

On sait que la fonction

$$\begin{array}{rccl} \sin : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

est une fonction impaire, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus périodique de période $2\pi$. On considère alors sa restriction $f$ à l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ définie ainsi :

$$\begin{array}{rccl} f : & [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \sin x \end{array}$$

Il est évident que $f$ est continue sur $I = [\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ et également impaire sur $I$. De plus, $f$ est strictement croissante sur $I$ et $f(I) = [-1\ 1] =: J$. Ainsi, nous avons

1. L'application

$$\begin{array}{rccl} f : & [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,\ 1] \\ & x & \longmapsto & f(x) = \sin x \end{array}$$

   est une bijection.

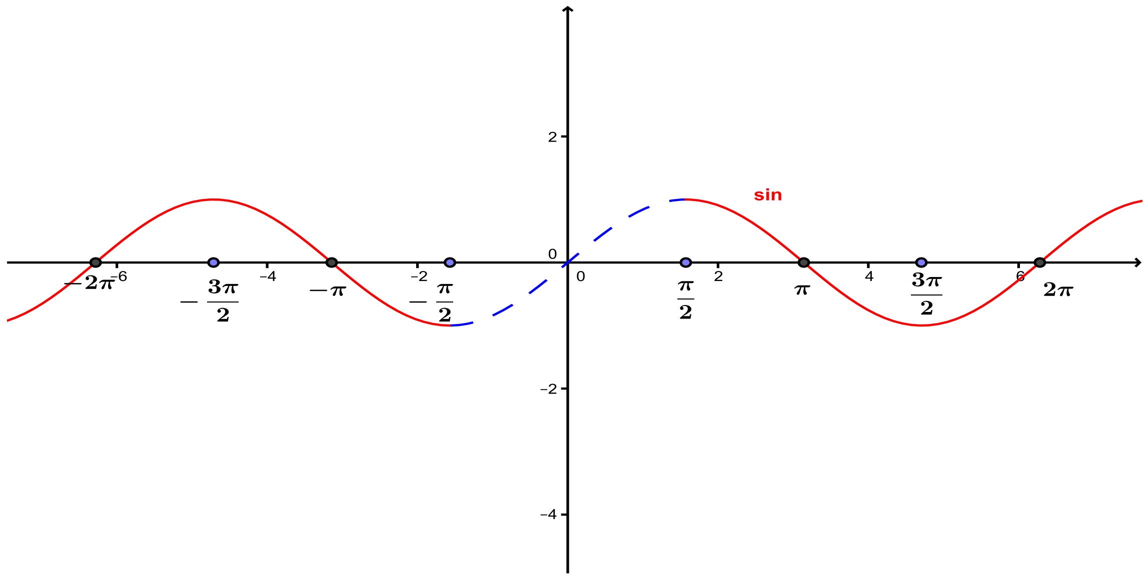



FIGURE 5.1 – Courbe de la fonction sin, la restriction de sin est indiquée en trait hachuré

2. La bijection réciproque de $f$ est notée arcsin et se lit *arc sinus*. Ainsi, la fonction *Arcsinus* est une bijection strictement croissante de $[-1,\ 1]$ sur $[\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ et

$$y = \arcsin x,\quad x \in [-1\ 1] \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sin y,\quad y \in [\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}].$$

3. La fonction arcsin est continue sur $[-1,\ 1]$ et est dérivable sur $]-1,\ 1[$ avec

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{pour tout } x \in ]-1,\ 1[.$$

4. La courbe d'équation $y = \arcsin x$ admet une tangente verticale aux points d'abscisses $x = -1$ et $x = 1$.

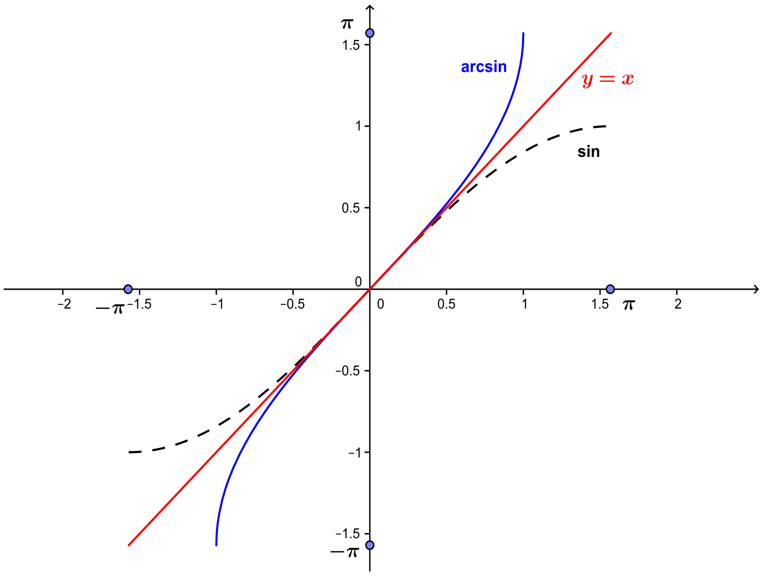



FIGURE 5.2 – Courbes de la fonction arcsin et de la restriction de la fonction sin

### 5.2.2 Fonction Arccosinus.

On sait que la fonction

$$\begin{array}{rccc} \cos: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

est une fonction paire, continue dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus périodique de période $2\pi$. On considère alors sa restriction $f$ à l'intervalle $[0,\ \pi]$ définie ainsi :

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,\ \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \cos x \end{array}$$

est continue sur $I = [0,\ \pi]$, strictement croissante sur $I$ et $g(I) = [-1\ 1] =: J$, alors nous avons

1. L'application

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,\ \pi] & \longrightarrow & [-1,\ 1] \\ & x & \longmapsto & g(x) = \cos x \end{array}$$

   est une bijection.

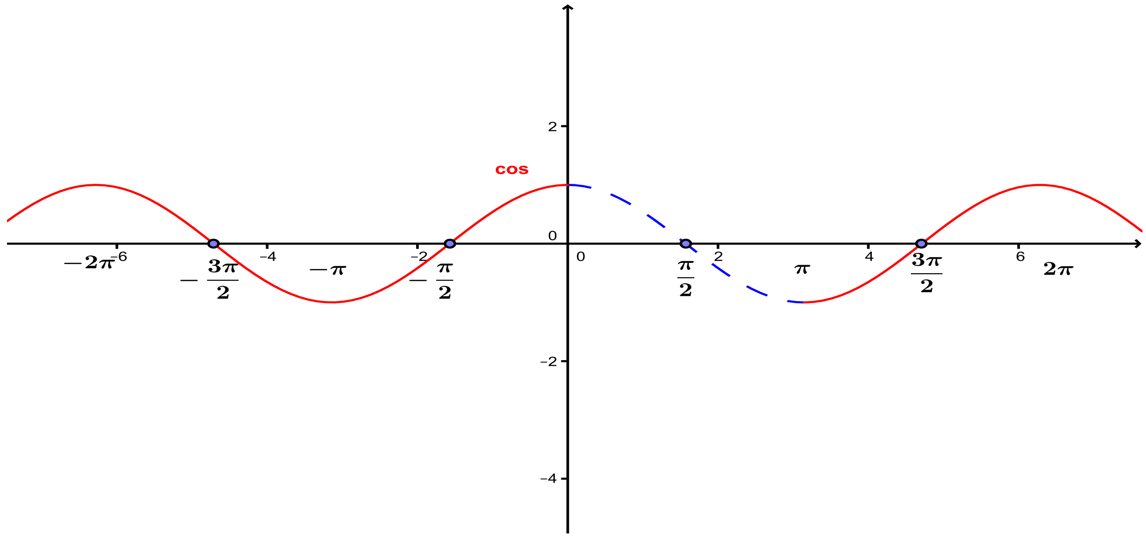



FIGURE 5.3 – Courbe de la fonction cos, la restriction de cos est indiquée en trait hachuré

2. La bijection réciproque de $g$ est notée arccos et se lit *arc cosinus*. Ainsi, la fonction *Arccosinus* est une bijection strictement croissante de $[-1,\ 1]$ sur $[0,\ \pi]$ et

$$y = \arccos x,\quad x \in [-1\ 1] \quad \Longleftrightarrow \quad x = \cos y,\quad y \in [0,\ \pi].$$

3. La fonction arccos est continue sur $[-1,\ 1]$ et est dérivable sur $]-1,\ 1[$ avec

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \text{pour tout } x \in ]-1,\ 1[.$$

4. La courbe d'équation $y = \arccos x$ admet une tangente verticale aux points d'abscisses $x = -1$ et $x = 1$.

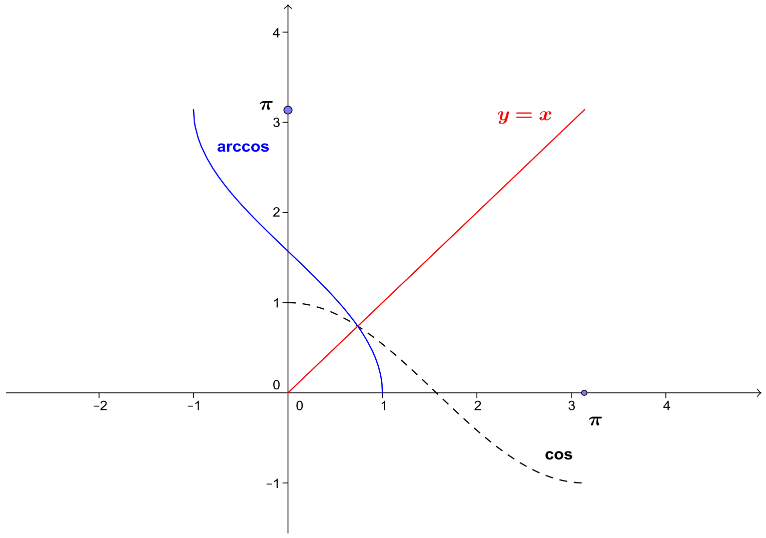



FIGURE 5.4 – Courbes de la fonction arccos et de la restriction de la fonction cos

### 5.2.3 Fonction Arctangente

On sait que la fonction

$$\begin{array}{rccl} \tan\ : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan x \end{array}$$

est une fonction impaire, continue, dérivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ]\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi[$ et de plus périodique de période $2\pi$. On considère alors sa restriction $h$ à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$ définie ainsi :

$$\begin{array}{rccl} h\ : & ]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & h(x)=\tan x \end{array}$$

Egalement, la fonction $h$ est impaire, continue sur $I=]-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}[$, strictement croissante sur $I$ et de plus $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} h(x)=+\infty$. D'ou $h(I)=\mathbb{R}$ et donc

1. L'application

   $$\begin{array}{rccl} h\ : & ]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x)=\tan x \end{array}$$

   est une bijection.

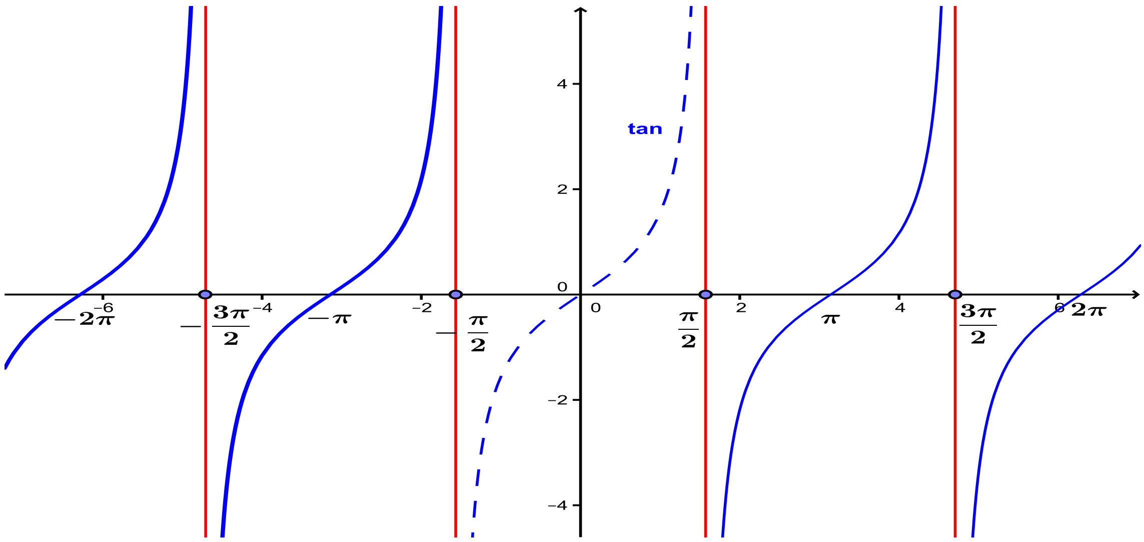



FIGURE 5.5 – Courbe de la fonction tan, la restriction de tan est indiquée en trait hachuré

2. La bijection réciproque de $h$ est notée arctan et se lit *arc tangente*. Ainsi, la fonction *Arctangente* est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}[$ et

   $$y=\arctan x,\ \ x\in\mathbb{R}\ \iff\ x=\tan y,\ \ y\in]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[.$$

3. La fonction arctan est impaire, continue sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

   $$\arctan' x=\frac{1}{1+x^2},\ \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

4. La courbe d'équation $y=\arctan x$ admet au voisinage de $-\infty$ (respectivement $+\infty$) la droite d'équation $y=-\frac{\pi}{2}$ (respectivement $y=\frac{\pi}{2}$) pour asymptote horizontale.

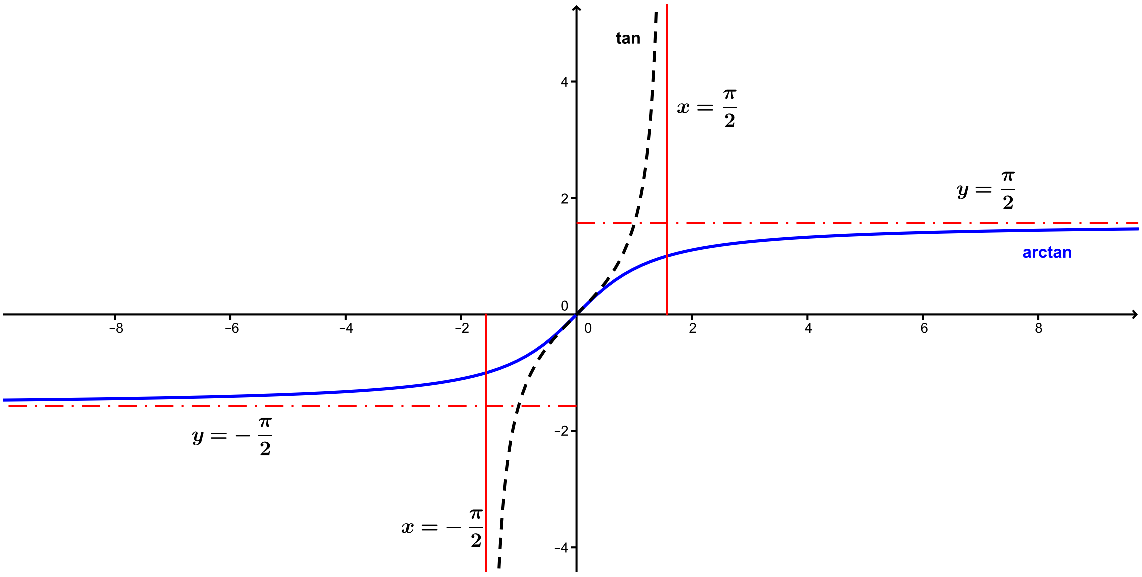



FIGURE 5.6 – Courbes des fonctions arctan et de la restriction de tan

### 5.2.4 Fonction Arc-cotangente

On sait que la fonction

$$\begin{array}{rccl} \cot: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cot x \end{array}$$

est une fonction continue, dérivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ]k\pi,\ (k+1)\pi[$ et de plus périodique de période $2\pi$. On considère alors sa restriction $\tilde{h}$ à l'intervalle $]0,\ \pi[$ définie ainsi :

$$\begin{array}{rccl} \tilde{h}: & ]0,\ \pi[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tilde{h}(x) = \cot x \end{array}$$

Il est clair que la fonction $\tilde{h}$ continue sur $I = ]0,\ \pi[$, strictement décroissante sur $I$. De plus $\lim_{x\to 0^+} \tilde{h}(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\pi^-} \tilde{h}(x) = -\infty$ . Ainsi $\tilde{h}(I) = \mathbb{R}$ et nous avons

1. L'application

$$\begin{array}{rccl} \tilde{h}: & ]0,\ \pi[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \cot x \end{array}$$

   est une bijection.
2. La bijection réciproque de $h$ est notée arccot et se lit *arc-cotangente*. Ainsi, la fonction *Arc-cotangente* est une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,\ \pi[$ et

$$y = \text{arccot } x,\quad x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \cot y,\quad y \in ]0,\ \pi[.$$

3. La fonction arccot est continue sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\text{arccot}' x = \frac{-1}{1+x^2},\quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4. La courbe d'équation $y =$arccot $x$ admet au voisinage de $-\infty$ (respectivement $+\infty$) la droite d'équation $y = \pi$ (respectivement $y = 0$) pour asymptote horizontale.

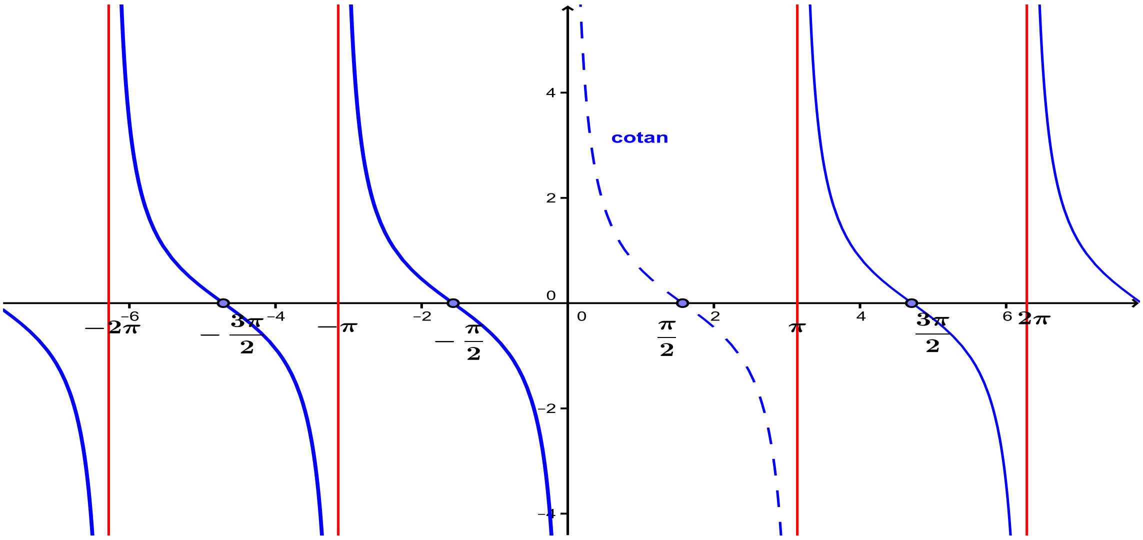



FIGURE 5.7 – Courbe de la fonction cotan, la restriction de cotan est indiquée en trait hachuré

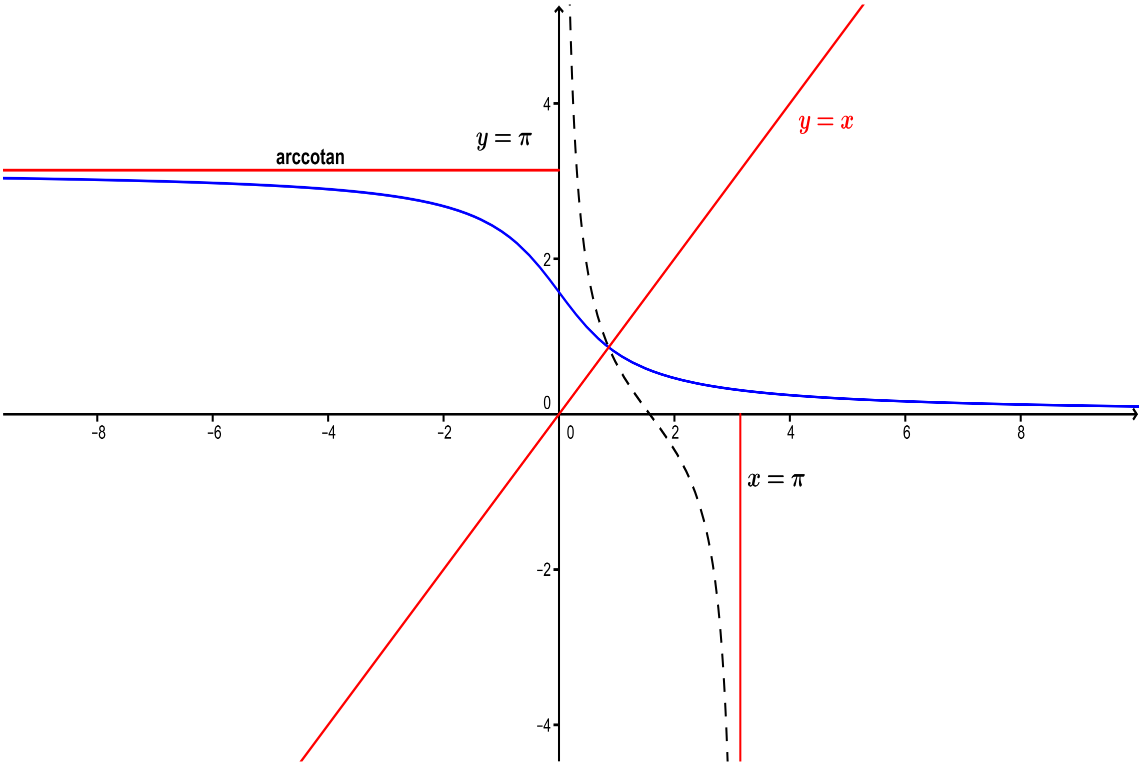



FIGURE 5.8 – Courbes des fonctions arccot et de la restriction de cotan

### 5.2.5 Exercices.

**Exercice 5.1.** *Pour $x \in \mathbb{R}$, vérifier que chacune des expressions*

$$(a)\ \ \arcsin x + \arccos x, \quad (b)\ \ \arctan x + \operatorname{arccot}\ x, \quad \textit{et } (c)\ \ \arctan x + \arctan(\frac{1}{x}).$$

*est une constante réelle que l'on déterminera.*

**Réponse.** En examinant les dérivées des fonctions trigonométrique réciproques, on remarque que :

(a) Pour tout $x \in ]-1,\ 1[$, $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos' x$. Ainsi, pour tout $x \in ]-1,\ 1[$, $(\arcsin x + \arccos x)' = 0$. On en déduit alors que $\exists c \in \mathbb{R}$ ($c = constante$) tel que $\arcsin x + \arccos x = c$. On détermine alors $c$ en prenant (par exemple) $x = 0$ et on a $c = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. Finalement

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in ]-1,\ 1[.$$

($b$) De la même manière que précédemment, on vérifie que $\arctan x + \text{arccot}\ x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

($c$) Remarquons que la fonction $x \longmapsto \arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle est impaire. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\left(\arctan(\frac{1}{x})\right)' = \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{-1}{1+x^2} = -\arctan' x$. On en déduit alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $(\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}))' = 0$.
Ainsi, $\exists c \in \mathbb{R}$ ($c = constante$) tel que $\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = c$ pour tout $x > 0$. On détermine alors $c$ en prenant (par exemple) $c = 1$ et on a $c = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$. Finalement

$$\begin{cases} \arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}, & \forall x \in \mathbb{R}^{*+} \\ \arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}, & \forall x \in \mathbb{R}^{*-}. \end{cases}$$

**Exercice 5.2.** *Tracer les courbes d'équations*

$$(a)\ \ y = \sin(\arcsin x) \quad et \quad (b)\ \ y = \arcsin(\sin x).$$

**Réponse.** Posons $f(x) = \sin(\arcsin x)$ et $g(x) = \arcsin(\sin x)$ et remarquons alors que les domaines de définition de $f$ et $g$ sont respectivement $D_f = [-1,\ 1]$ et $D_g = \mathbb{R}$.

(a) Puisque la fonction $x \longmapsto \arcsin x$ est la bijection réciproque de la fonction $x \longmapsto \sin x$ sur $D_f = [-1,\ 1]$, alors $f(x) = x$ pour tout $x \in D_f$.

(b) Puisque la fonction $x \longmapsto \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire et périodique de période $2\pi$, alors la fonction $x \longmapsto g(x)$ est également impaire et périodique de période $2\pi$. Etudions donc la fonction $g$ sur l'intervalle $[0,\ \pi]$.

- *Cas 1.* $x \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$
  Pour $x \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$, la fonction $x \longmapsto \sin x$ est bijective de $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ sur $[0,\ 1]$ et sa bijection réciproque est la restriction de la fonction $x \longmapsto \arcsin x$ à l'intervalle $[0,\ 1]$. Ainsi, $g(x) = x$ pour tout $x \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$.

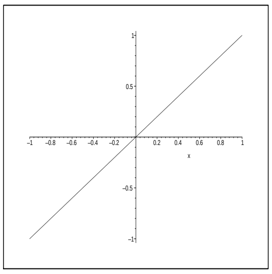
- *Cas 2.* $x \in [\frac{\pi}{2},\ \pi]$
  Pour $x \in [\frac{\pi}{2},\ \pi]$, on a $\sin x = \sin(\pi - x)$, or $X = \pi - x \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$ et donc, en utilisant le résultat obtenu dans le cas 1, on a $g(x) = g(X) = X = \pi - x$. Ainsi, $g(x) = \pi - x$ pour tout $x \in [\frac{\pi}{2},\ \pi]$.

Ainsi le tracé des courbes des fonction $f$ et $g$ est comme suit :

**Exercice 5.3.** *Démontrer les inégalités suivantes :*

$$(a)\ \ \arcsin a < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad si\ 0 < a < 1, \quad et \quad (b)\ \ \arctan a > \frac{a}{1+a^2} \quad si\ a > 0.$$

**Réponse.**



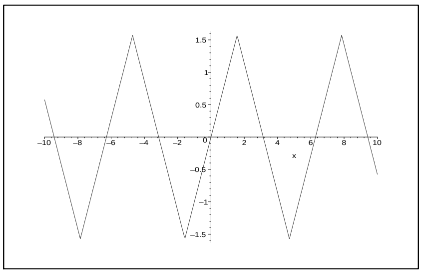


FIGURE 5.9 – Courbes des fonctions $f = \sin(\arcsin .)$ (à gauche) et $g = \arcsin(\sin .)$ (à droite)

(a) Soit $f(a) = \arcsin a - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ sur $]0,1[$. Alors $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-a^2}(1-a^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{-a^2}{1-a^2}$ et donc $f'(a) \leq 0$. Ainsi $f$ est strictement décroissante et $f(0) = 0$ et par suite donc $f(a) < 0$ pour tout $a \in ]0,1[$.

(b) Posons $g(a) = \arctan a - \frac{a}{1+a^2}$. On a alors $g'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{2a^2}{(1+a^2)^2} > 0$. Donc $g$ est strictement croissante. Comme $g(0) = 0$, alors $g$ est strictement positive sur $]0,+\infty[$.

## 5.3 Fonctions hyperboliques

### 5.3.1 Définitions et propriétés.

**Définition 5.1.**
*Les fonctions hyperboliques sont les fonctions ci dessous :*

- ***Sinus hyperbolique.*** *Cette fonction est notée* sinh *(ou encore sh) et est définie par* $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
- ***Cosinus hyperbolique.*** *Cette fonction est notée* cosh *(ou encore ch), et est définie par* $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- ***Tangente hyperbolique.*** *Cette fonction est notée* tanh *(ou encore th) et est définie par* $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$.
- ***Cotangente hyperbolique.*** *Cette fonction est notée* coth, *et est définie par* $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$.

**Proposition 5.1.**

1. *Les fonctions* $x \longmapsto \sinh x$, $x \longmapsto \cosh x$ *et* $x \longmapsto \tanh x$ *sont définies, continues et indéfiniment dérivables sur* $\mathbb{R}$.
2. *La fonction* $x \longmapsto \coth x$ *est définie, continue et indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}^*$.
3. *La fonction* $x \longmapsto \cosh x$ *est paire tandis que les fonctions* $x \longmapsto \sinh x$, $x \longmapsto \tanh x$ *et* $x \longmapsto \coth x$ *sont impaires.*
4. *Les dérivées des fonctions hyperboliques vérifient :*

$$\sinh' x = \cosh x; \qquad \cos' x = \sinh x;$$

*et*

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x; \qquad \coth' x = \frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x.$$

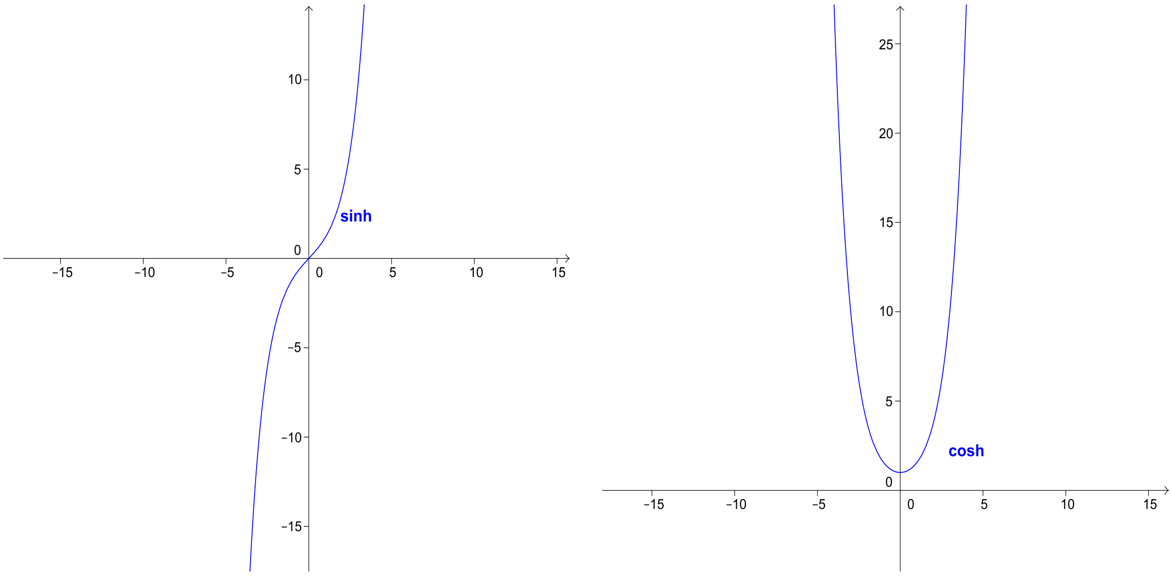



FIGURE 5.10 – Courbes des fonctions sinh (à gauche) et cosh (à droite)

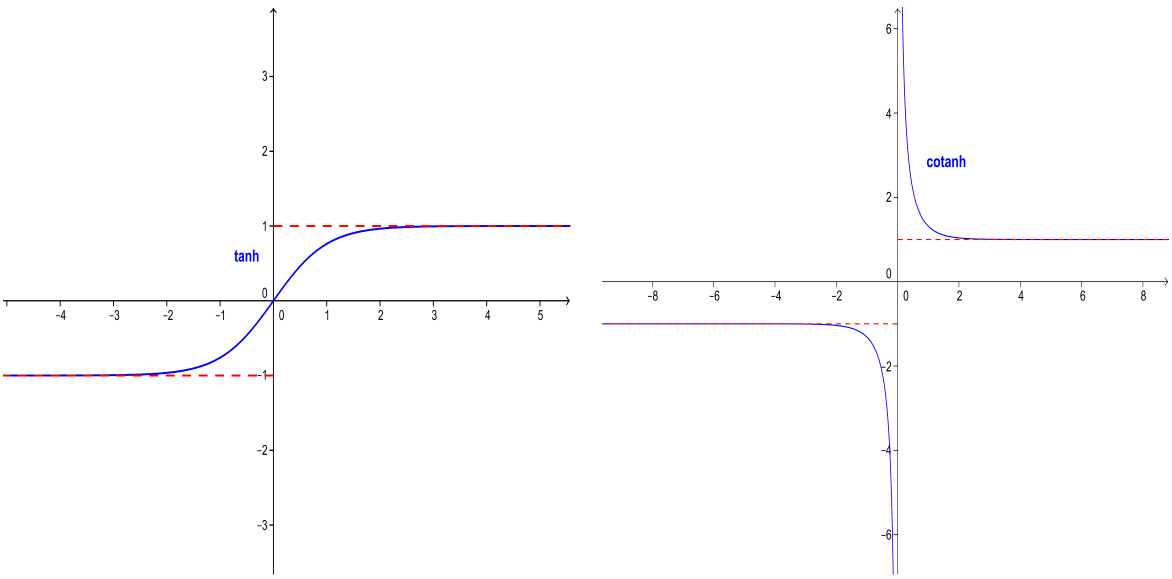



FIGURE 5.11 – Courbes des fonctions tanh (à gauche) et cotanh (à droite)

### 5.3.2 Formulaire de trigonométrie "hyperbolique"

En utilisant les définitions des fonctions hyperboliques et les propriétés de la fonction $x \longmapsto e^x$, on peut établir les différentes formules ci-dessous :

– **Formules fondamentales.**

- $\cosh x + \sinh x = e^x$ ; • $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ; • $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ ; • $1 - \coth^2 x = \dfrac{-1}{\sinh^2 x}$.

– **Formules d'addition.**

- $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ ; • $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$.
- $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ ; • $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$
- $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$ ; • $\tanh(x-y) = \dfrac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$

– **Formules de somme, différence et produit.**

- $\cosh p + \cosh q = 2\cosh\left(\frac{p+q}{2}\right)\cosh\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ; • $\cosh p - \cosh q = 2\sinh\left(\frac{p+q}{2}\right)\sinh\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\sinh(p) + \sinh(q) = 2\sinh\left(\frac{p+q}{2}\right)\cosh\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ; • $\sinh p - \sinh q = 2\cosh\left(\frac{p+q}{2}\right)\sinh\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\tanh p + \tanh q = \dfrac{\sinh(p+q)}{\cosh p \cosh q}$ ; • $\tanh p - \tanh q = \dfrac{\sinh(p-q)}{\cosh p \cosh q}$.

– **Autres Formules.**

- $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$.
- $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$.
- En posant $t = \tanh(\dfrac{x}{2})$, on a $\cosh x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ ; $\sinh x = \dfrac{2t}{1-t^2}$ ; $\tanh x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.
- $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- $(\cosh x - \sinh x)^n = \cosh(nx) - \sinh(nx)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

### 5.3.3 Exercices

**Exercice 5.4.** *Exprimer* $\cosh(3x)$ *en fonction de* $\cosh(x)$ *et de* $\cosh^3(x)$.

**Réponse.**

**Exercice 5.5.** *Linéariser* $\cosh^4\ x$.

**Réponse.**

**Exercice 5.6.** *Déterminer le* $DL_4(0)$ *de la fonction* $x \longmapsto \tanh\ x$.

**Réponse.**

**Exercice 5.7.** *Trouver une formule sommatoire pour* $\sinh\ x + \sinh(2x) + \ldots + \sinh(nx)$.

**Réponse.**

**Exercice 5.8.** *Etudier en* $x_0 = 0$ *la fonction* $f$ *telle que* $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tanh\ x}$ *pour* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$.

**Réponse.**

## 5.4 Fonctions hyperboliques réciproques

### 5.4.1 Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction $x \longmapsto \sinh x$ est une fonction impaire, continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{+\infty} \sinh x = +\infty$. C'est donc bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque, notée argsinh, existe. Ainsi, la fonction

$$\begin{array}{rccl} \text{argsinh}\ : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{argsinh}\ x \end{array}$$

vérifie :

1. La fonction argsinh est définie continue, impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$$y = \text{argsinh}\ x,\ \ x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sinh y,\ \ y \in \mathbb{R}.$$
2. La fonction argsinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec
$$(\text{argsinh}\ x)^{'} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$
3. On peut vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{argsinh}\ x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

### 5.4.2 Fonction argument cosinus hyperbolique.

Soit $f$ la restriction de la fonction $x \longmapsto \cosh(x)$ à l'intervalle $[0,\ +\infty[$. Alors $f$ est une fonction continue, strictement croissante sur $[0,\ +\infty[$. De plus, comme $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$, il vient que $f$ est une bijection de $[0,\ +\infty[$ sur $[1,\ +\infty[$ et sa bijection réciproque, notée argcosh, existe. Ainsi, la fonction

$$\begin{array}{rccl} \text{argcosh}\ : & [1,\ +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \text{argcosh}\ x \end{array}$$

vérifie :

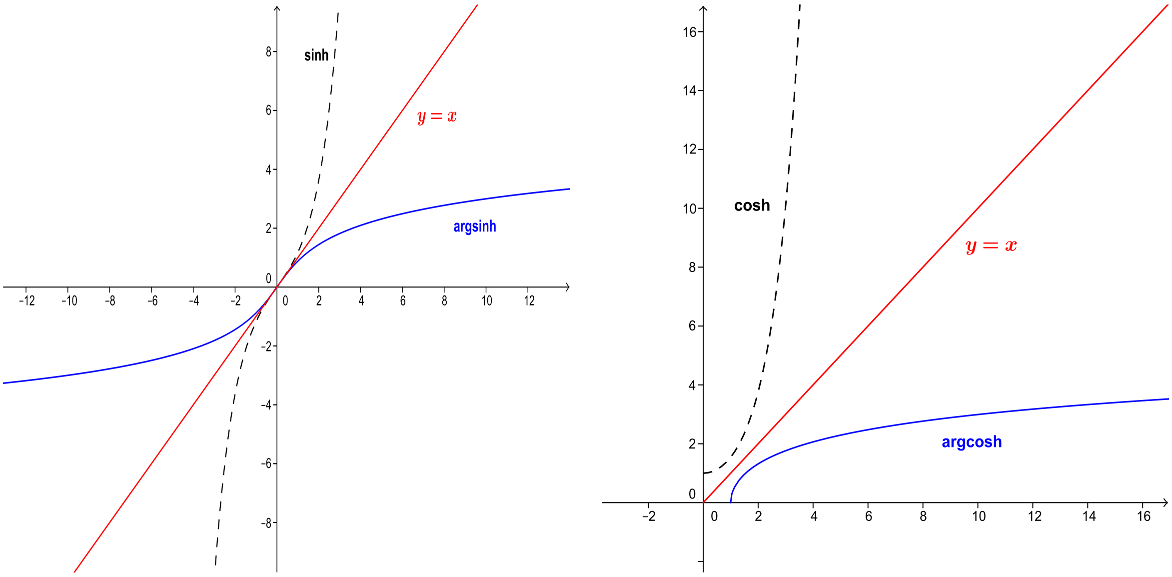



FIGURE 5.12 – Courbes des fonctions argsinh et de sinh (à gauche) et celle de argcosh et de la restriction de cosh (à droite)

1. La fonction argcosh est définie continue, et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
$$y = \operatorname{argcosh}\ x,\quad x \in [1, +\infty[ \quad \Longleftrightarrow \quad x = \cosh y,\quad y \in [0, +\infty[.$$
2. La fonction argsinh est dérivable sur $]1, +\infty[$ avec
$$(\operatorname{argcosh}\ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\quad \text{pour tout } x \in ]1, +\infty[.$$
et en $x_0 = 1$, la courbe de fonction argcosh admet une tangente verticale.
3. On peut vérifier que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{argcosh}\ x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

### 5.4.3 Fonction argument tangente hyperbolique

Comme la fonction $x \longmapsto \tanh x$ est une fonction impaire, continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim\limits_{+\infty} \tanh x = 1$, alors cette fonction est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et sa bijection réciproque, notée argtanh, existe. Ainsi, la fonction
$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{argtanh}: & ]-1, 1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{argtanh}\ x \end{array}$$
vérifie :

1. La fonction argtanh est définie continue, impaire et strictement croissante sur $]-1, 1[$.
$$y = \operatorname{argsinh}\ x,\quad x \in ]-1, 1[ \quad \Longleftrightarrow \quad x = \tanh y,\quad y \in \mathbb{R}.$$
2. La fonction argsinh est dérivable sur $]-1, 1[$ avec
$$(\operatorname{argtanh}\ x)' = \frac{1}{1-x^2},\quad \text{pour tout } x \in ]-1, 1[.$$
3. On peut vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argtanh}\ x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

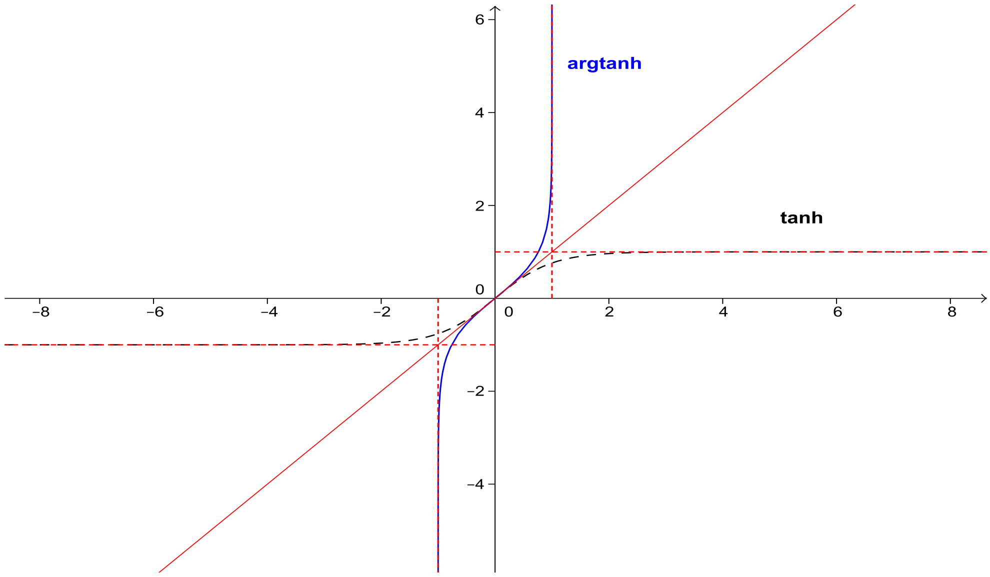



FIGURE 5.13 – Courbes des fonctions tanh et de argtanh

### 5.4.4 Exercices

**Exercice 5.9.** *Définir et étudier la fonction* argcoth.

**Réponse.**

**Exercice 5.10.** *Montrer que la courbe* $y = \ln(2x)$ *est asymptote aux courbes* $y = \operatorname{argsinh} x$ *et* $y = \operatorname{argcosh} x$ *en* $x = +\infty$.

**Réponse.**

**Exercice 5.11.** *Simplifier les expressions* $\operatorname{argcosh}(\sqrt{1+x^2})$ *et* $\operatorname{argcosh}(\sqrt{\frac{1+\cosh x}{2}}) - \frac{x}{2}$.

**Réponse.**

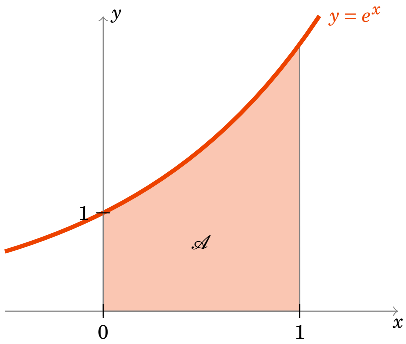
# Chapitre 6

# Intégration de fonctions réelles

## 6.1 Notion d'intégrale de Riemann

### 6.1.1 Approximation d'une aire

A l'aide de l'exemple du calcul d'aire ci dessous[1], nous allons essayer d'introduire la notion d'intégrale. Nous considérons donc la fonction $f(x) = e^x$ pour laquelle on va calculer l'aire $\mathscr{A}$ située en-dessous de la courbe de $f$ et compris entre les droites d'équations $x = a$, $x = 1$ et l'axe $(Ox)$. Dans la suite, nous prenons $a = 0$ et $b = 1$.



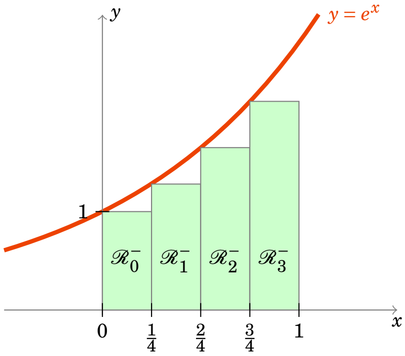

L'aire que désirons calculer peut être approchée par la somme des aires des rectangles situés sous la courbe. Pour cela, nous considérons la subdivision $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$, où $x_i = a + i\,h$ avec $h = \frac{b-a}{n}$ (Pour $a = 0$ et $b = 1$, cela donne $x_i = \frac{i}{n}$ et on obtient la séquence des points $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$) qui permet de découper l'intervalle $[0,1]$ en la réunion des intervalles $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ pour $i = 0, \ldots, n-1$, i.e., $[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [\dfrac{i}{n}, \dfrac{i+1}{n}]$.

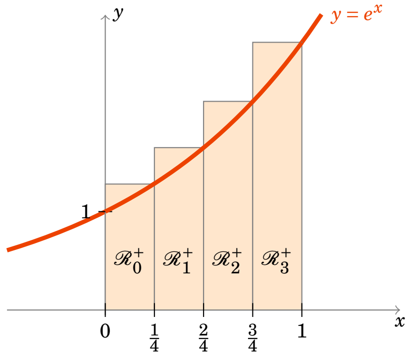
Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et considérons les "rectangles inférieurs" $\mathscr{R}_i^-$ de base l'intervalle $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ et de hauteur $f(\frac{i-1}{n}) = e^{\frac{i-1}{n}}$. Comme l'aire de $\mathscr{R}_i^-$ est donnée par : $\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$, alors en utilisant les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique, la somme des aires des $\mathscr{R}_i^-$ est alors donnée par :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \frac{1}{n} \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} (e - 1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e - 1,$$

où on a utilisé la limite usuelles $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

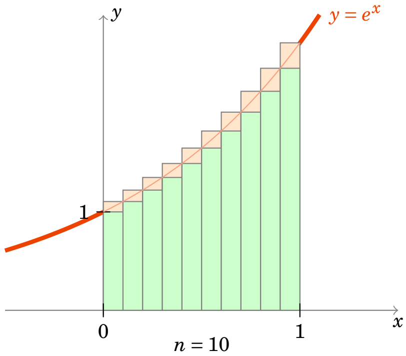
1. cet exemple provient du site Exo7




De même, si on considère les "rectangles supérieurs" $\mathscr{R}_i^+$ de base $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ et de hauteur $f\left(\frac{i}{n}\right) = e^{i/n}$, on obtient de façon similaire $\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n} \to e-1$ lorsque $n \to +\infty$.

Remarquons finalement que l'aire $\mathscr{A}$ que nous désirons calculer est supérieure à la somme des aires des rectangles inférieurs ; et elle est inférieure à la somme des aires des rectangles supérieurs. De plus, si on considère des subdivisions de plus en plus fines -ce qui mathématiquement revient à faire tendre $n$ vers $+\infty$- alors on voit que l'aire $\mathscr{A}$ recherchée est encadrée par deux aires qui tendent toutes les deux vers $e-1$. Ainsi l'aire de notre région est $\mathscr{A} = e-1$.




### 6.1.2 Intégrale au sens de Riemann

Plus généralement, soient $x \longmapsto f(x)$ une fonction $f$ bornée sur un intervalle bornée $[a,b]$, $C_f$ la courbe de $f$ et $S$ la surface délimitée par la courbe $C_f$ et les droites d'équations $x = a$, $x = b$ et $y = 0$ dont on cherche à évaluer l'aire algébrique $\mathscr{A}$.
Pour cela, plaçons alors entre $a$ et $b$, des réels $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ et dans chaque intervalle de la forme $[x_{i-1}, x_i]$ choisissons un réel $\eta_i$ quelconque. On appelle alors $\mathscr{R}_i$ le rectangle de base $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteur $y_i = f(\eta_i)$.

Considérons alors la somme, qu'on appelle somme de Riemann :

$$S_n = (x_1, -x_0)f(\eta_1) + (x_2 - x_1)f(\eta_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(\eta_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\eta_i).$$

Cette somme $S_n$ -qui mesure l'aire algébrique totale des rectangles $\mathscr{R}_i$- dépend des paramètres $x_i$ et $\eta_i$. Comme les rectangles $\mathscr{R}_i$ recouvrent approximativement la surface $S$, il est clair que, plus les largeurs des rectangles $\mathscr{R}_i$ sont petites, meilleure est l'approximation de l'aire $\mathscr{A}$ par l'aire $S_n$.

Si, en faisant tendre $n$ vers $+\infty$ de sorte que la largeur de chaque rectangle $\mathscr{R}_i$ va tendre vers 0, toutes les sommes de Riemann $S_n$ ont une limite commune égale à $L$ et indépendante de la suite $x_1, \ldots, x_{n-1}$, alors on dit que $f$ est ***intégrable -au sens de Riemann- sur l'intervalle*** $[a,b]$ et cette limite $L$ -qui est en fait égale à l'aire algébrique $\mathscr{A}$-est appelée ***Intégrale de $f$ sur*** $[a,b]$ ***et on note*** $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Le résultat suivant nous rassure sur l'existence de cette limite $L$.

**Théorème 6.1.** *Soit $a,\ b \in \mathbb{R}$, $(a \le b)$ alors toute fonction bornée ayant un nombre fini de points de discontinuités sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.*

Ainsi, on voit que toute fonction continue sur une intervalle bornée $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$ et si une fonction $f$ est discontinue en un point $x_0 \in [a,b]$ admettant une limite finie à gauche et une limite finie à droite de $x_0$, on pose par définition :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx.$$

## 6.2 Primitives et intégrales

Dans toute cette section, $f$ désigne une fonction définie sur un intervalle $I$.

**Définition 6.1.** *On dit que la fonction $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ si $F$ est dérivable sur $I$ et $F^{'}(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

**Exemple 6.1.**

1. *La fonction $x \longmapsto \ln x$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$.*
2. *La fonction $x \longmapsto x^5+3x^2+10x$ ainsi que la fonction $x \longmapsto x^5+3x^2+10x+7$ sont chacune une primitive de $x \longmapsto 5x^4+6x+10$ sur $\mathbb{R}$.*

**Remarque 6.1.** *Le dernier exemple montre que si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ ; alors il en est de même de $F+c$ où $c$ est une constante quelconque de $\mathbb{R}$.*

**Proposition 6.1.**

- *Si $f$ admet $F$ comme primitive sur $I$, alors les primitives de $f$ sur $I$ sont les fonctions de la forme $F+c$ où $c$ est une constante quelconque de $\mathbb{R}$.*
- *Si $a \in I$, alors $f$ admet une unique primitive $F$ qui s'annule en $a$ (i.e., telle que $F(a) = 0$)*

### 6.2.1 Relation entre primitive et intégrale

On vient d'annoncer que si $F$ et $G$ sont des primitives d'une fonction $f$ définie sur un intervalle $[a,b]$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F(x) = G(x)+c$ pour tout $x \in [a,b]$.
Ainsi, $G(b)-G(a) = F(b)-F(a)$ et on voit donc que l'accroissement de la primitive de $f$ entre $a$ et $b$ ne dépend pas de la primitive considérée mais uniquement de la fonction $f$ et des bornes $a$ et $b$. On démontre que la quantité $F(b)-F(a)$ est égale à la valeur de l'intégrale de $f$ sur $[a,b]$. On écrit alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a).$$

On écrit également :

$$F(x) = \int f(x)dx \qquad \text{ou encore} \quad F = \int f,$$

pour indiquer que $F$ est une primitive de $f$.

De même, on peut vérifier que la fonction $F$ définie par $x \longmapsto F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ admet une dérivée $F'$, et de plus $F' = f$. Ainsi, on écrit

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt \qquad \text{ou encore} \quad F = \int_\alpha^x f,$$

pour indiquer que $F$ est la primitive de $f$ qui s'annule en $x_0$.

Le tableau ci dessous résume les primitives fréquemment rencontrées :

| Fonction $f(x)$ | $D_f$ | Primitive $F(x) = \int f(x)dx$ |
|---|---|---|
| $x^\alpha$ $(\alpha < 0,\ \alpha \neq -1)$ | $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}^{*+}$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ |
| $x^\alpha$ $(\alpha > 0)$ | $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ |
| $\frac{1}{x^2+1}$ | $\mathbb{R}$ | $\arctan x + c$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^{*-}$ ou $\mathbb{R}^{*+}$ | $\ln\lvert x\rvert + c$ |
| $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $e^x + c$ |
| $a^x$ $(a > 0)$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{a^x}{\ln a} + c$ |
| $\sin(\alpha x + \beta)$ $(\alpha \neq 0)$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{-1}{\alpha}\cos(\alpha x + \beta) + c$ |
| $\cos(\alpha x + \beta)$ $(\alpha \neq 0)$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x + \beta) + c$ |
| $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ | $\tan x + c$ |
| $1 + \text{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ | $\mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ | $\frac{-1}{\tan x} + c$ |
| $\tan x$ | $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ | $-\ln\lvert\cos x\rvert + c$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $]-1,1[$ | $\arcsin x + c$ |
| .... | .... | .... |

Une application immédiate des résultats précédents permet de calculer les primitives apparaissant dans les exemples ci dessous.

**Exemple 6.2.**

1. $\int_0^{10}(x^3 + 5x)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{5x^2}{2}\right]_0^{10} = \ldots = 2336.$
2. $\int_1^2 \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^2 = \ln 2.$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ldots = -\frac{1}{2}\ln 2.$
4. *La primitive de la fonction* $x \longmapsto e^x$ *qui s'annule en 1 est donnée par* $F(x) = \int_1^x e^t\, dt = \left[e^t\right]_1^x = e^x - e.$

### 6.2.2 Propriétés de l'intégrale

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ et $f,\ g$ deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a, b]$, alors

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx,\ \forall c \in \mathbb{R}$ (Relation de Chasles)
- $\displaystyle\int_a^b \big(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\big)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,dx,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$ (Linéarité de l'intégrale)
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$
- Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$ (Signe de l'intégrale)
- $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$
- Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$

**Définition 6.2.** *On appelle valeur moyenne de $f$ sur $[a,b]$ le nombre* $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$

**Exercice 6.1.** *Calculer* $\lim\limits_n I_n$, *où* $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \cos^2 x\,dx$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

**Réponse.** D'après l'avant dernière propriété ci dessus, on a :

$$\begin{array}{rcl} |I_n| & \leq & \displaystyle\int_0^1 \left|x^n \cos^2 x\right| dx \\ & \leq & \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n+1}, \end{array}$$

et ainsi $\lim\limits_n I_n = 0$.

**Théorème 6.2.** *Soit $f$ une fonction définie et continue sur $[a,b]$, alors*

$$\exists c \in ]a,\ b[ \text{ tel que } f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

**Théorème 6.3.** *(de Cauchy-Schwartz)*
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,b]$, alors*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right).$$

## 6.3 Calcul d'intégrales

### 6.3.1 Intégration par parties

Soient $u$, $v$ deux fonctions de classe $C^1$ sur $[a,b]$. On sait que $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, ainsi

$$u'(x)v(x) = (u(x)v(x))' - u(x)v'(x),$$

et en intégrant on obtient

$$\int_a^b u^{'}(x)v(x)\,dx = \int_a^b (u(x)v(x))^{'}\,dx - \int_a^b u(x)v^{'}(x)\,dx.$$

C'est à dire

$$\int_a^b u^{'}(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]\,dx - \int_a^b u(x)v^{'}(x)\,dx.$$

D'ou

**Proposition 6.2.** *(Intégration par parties)*
*Si $u$ et $v$ sont deux fonctions de classe $C^1$ sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b u^{'}(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]\,dx - \int_a^b u(x)v^{'}(x)\,dx.$$

**Exemple 6.3.**

1. *En effectuant successivement deux intégrations par parties, on a :*

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2 e^x\,dx &= [x^2 e^x]_0^2 - 2\int -0^2 x e^x\,dx \\
&= 4e^2 - 2\left([xe^x]_0^2 - \int -0^2 e^x\,dx\right) \\
&= 4e^2 - 2\left(2e^2 - [e^x]_0^2\right) \\
&= 2(e^2-1).
\end{aligned}$$

2. *Utilisons une IPP (intégration par parties) pour déterminer la primitive de $x \longmapsto x^3 \ln x$ qui s'annule en $x_0 = 1$. Ainsi, on a :*

$$\begin{aligned}
\int_1^x t^3 \ln t\,dt &= \left[\frac{t^4}{4}\ln t\right]_1^x - \int -1^x \frac{t^4}{4}\frac{1}{t}\,dt \\
&= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int -1^x t^3\,dt \\
&= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{16}\,[t^4]_1^x \\
&= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

**Exercice 6.2.** *(Intégrale de Wallis)*
*Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$*

1. *Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.*
2. *Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in [0, \frac{\pi}{2}[,\ 0 \le I_n \le \frac{\pi}{2}\sin^n(\lambda) + (\frac{\pi}{2} - \lambda)$ et en déduire que $\lim_n I_n = 0$.*
3. *Etablir que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.*
4. *Déduire des questions précédentes que : $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$, $\lim_n \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ et $\lim_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}}I_n = 1$.*

### 6.3.2 Changement de variable

Soient $\phi$ une fonction de classe $C^1$ sur $[a,b]$, $f$ une fonction continue sur $\phi([a,b])$ et notons $F$ une primitive de $f$ sur $\phi([a,b])$. Alors,

$$\left(F\circ\phi\right)^{'} = \left(F^{'}\circ\phi\right)\cdot\phi^{'} = \left(f\circ\phi\right)\phi^{'},$$

c'est à dire que $F\circ\phi$ est une primitive de $\left(f\circ\phi\right)\phi^{'}$ sur $[a,b]$. D'ou

**Proposition 6.3.** *(Changement de variable)*
*Soient $\phi$ une fonction de classe $C^1$ sur $[a,b]$ et $f$ une fonction continue sur $\phi([a,b])$, alors*

$$\int_a^b f\left(\phi(x)\right)\phi^{'}(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx.$$

**Exemple 6.4.**

1. *Pour calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x - 5\sin x)\,dx$, on considère le changement de variable $\phi(x) = \sin x$ et on prend $f(x) = x^3 - 5x$. Dans ce cas, on a $\phi(0) = 0$ et $\phi(\frac{\pi}{2}) = 1$ et donc*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x - 5\sin x)\,dx = \int_0^1 (x^3 5x)\,dx = \frac{-9}{4}.$$

2. *Pour calculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, on considère le changement de variable $\phi(x) = 1-x^2$ et on prend $f(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$. Comme, $\phi(0) = 1$ et $\phi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ on obtient*

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{-dx}{2\sqrt{x}} = \left[-\sqrt{x}\right]_1^{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Remarquons que souvent dans la pratique, il peut être utile de poser $x = \psi(t)$ dont la différentielle est donnée par $dx = \psi^{'}(t)\,dt$. Dans ces conditions, en posant $g(t) = f(\psi(t))\psi^{'}(t)$ on a

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi^{'}(t)\,dt = \int g(t)\,dt = G(t) + c = G\left(\psi^{-1}(x)\right) + c,$$

où $G$ est une primitive de $g$. A noter que la fonction $\psi$ doit être bijective (donc inversible) et à dérivée continue.
Pour les intégrales ayant des bornes $a$ et $b$, on obtient en posant $x = \psi(t)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi^{'}(t)\,dt = [G(t)]_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha),$$

où $\alpha = \psi^{-1}(a)$ et $\beta = \psi^{-1}(b)$ et $\psi$ étant bijective sur $[\alpha,\beta]$ et à dérivée continue sur $]\alpha,\beta[$.

**Exemple 6.5.** *Utilisons le résultat précédent pour recalculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.*
*On pose alors $u(x) = 1-x^2$ qu'on note abusivement $u = 1-x^2$. Dans ce cas $du = -2x\,dx$ et pour $x = 0$ on a $u = u(0) = 1$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $u = u(0) = \frac{3}{4}$. Ainsi,*

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{du}{-2\sqrt{u}} = \ldots = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### 6.3.3 Primitives de fractions rationnelles

Pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, il est souvent nécessaire de procéder à la décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle. Si le polynôme quotient $Q(x)$ se factorise sur $\mathbb{R}$ sous la forme irréductible

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_l)^{n_l}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_kx+q_k)^{m_k},$$

où $a_1,\ldots,a_l$ sont les pôles de la fraction rationnelle $f(x)$ et les paramètres $n_i,\ m_i \in \mathbb{N},\ p_i,\ q_i \in \mathbb{R}$ sont tels que $p_i^2 - 4q_i < 0$ alors la décomposition de $f(x)$ s'écrit sous la forme

$$f(x) = E(x) + \sum_{i=1}^{l} \frac{\alpha_i}{(x-a_i)^{n_i}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j x + \mu_j}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}},$$

où les paramètres $\alpha_i,\ \lambda_j,\ \mu_j$ sont des réels à déterminer et $E(x)$ étant le polynôme partie entière de $f(x)$ généralement obtenu par division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$.

On voit donc que pour déterminer une primitive de $f(x)$, on est ramené dans le cas général à intégrer l'un des types de fonctions ci dessous :

- **Eléments simples de première espèce de la forme $\frac{\alpha}{(x-a)^n}$.**
  - *Cas* $n = 1$. Dans ce cas, il est facile de voir que :

$$\int \frac{\alpha}{(x-a)^n}\,dx = \int \frac{\alpha}{(x-a)}\,dx = \alpha \ln|x-a|.$$

  - *Cas* $n \neq 1$. Il est également facile de voir que pour $n \neq 1$ on a :

$$\int \frac{\alpha}{(x-a)^n}\,dx = \int \frac{\alpha}{(x-a)^{-n}}\,dx = \frac{\alpha}{1-n}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}}.$$

- **Eléments simples de deuxième espèce de la forme $\frac{\lambda x+\mu}{(x^2+px+q)^m}$ avec $p^2-4q<0$.**

  On commence par exprimer $\lambda x + \mu$ en fonction de la dérivée de $x^2+px+q$ en écrivant :

$$\lambda x + \mu = \frac{\lambda}{2}(2x+p) + (\mu - \frac{p\lambda}{2}),$$

  et cela donne

$$\int \frac{\lambda x+\mu}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{\lambda}{2}\underbrace{\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\,dx}_{:=I_m} + (\mu - \frac{p\lambda}{2})\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m}\,dx}_{:=J_m}.$$

  Pour calculer $I_m$, deux cas sont à distinguer :
  - *Cas* $m = 1$. On vérifie alors que

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)}\,dx = \ln|x^2+px+q| + c \qquad \text{où } c \text{ est une constante.}$$

  - *Cas* $m \neq 1$. On vérifie alors que

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{1}{(1-m)(x^2+px+q)^{m-1}} + c \qquad \text{où } c \text{ est une constante.}$$

Le calcul de $J_m$ est un peu plus compliqué, il nécessite qu'on écrive le trinôme $x^2+px+q$ sous forme canonique, c'est à dire

$$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})=(x+b)^2+c^2,$$

où $b=\frac{p}{2}$ et $c=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. On a ainsi,

$$J_m=\int\frac{1}{\left((x+b)^2+c^2\right)^m}\,dx=\frac{1}{c^{2m}}\underbrace{\int\frac{1}{\left((\frac{x+b}{c})^2+1\right)^m}\,dx}_{:=K_m}.$$

On effectue alors un changement de variable affine en posant $u=\frac{x+b}{c}$, ainsi $K_m$ devient

$$K_m=\int\frac{1}{\left((\frac{x+b}{c})^2+1\right)^m}\,dx=c\underbrace{\int\frac{1}{(u^2+1)^m}\,du}_{:=L_m}.$$

En utilisant une intégration par parties on peut trouver une relation de récurrence liant les $L_m$ et permettant de calculer effectivement leurs valeurs explicites.

Les résultats précédents sont mis en pratique dans les exemples ci-dessous.

**Exemple 6.6.**

1. *Calculons les primitives de* $f_1(x)=\dfrac{1}{x^3-7x+6}$ *sur* $[0,1]$.
   *En décomposant en élément simples, on trouve que*

$$f_1(x)=\frac{1}{20}\frac{1}{x+3}-\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{5}\frac{1}{x-2}.$$

   *Il vient alors que*

$$\int f_1(x)\,dx=\frac{1}{20}\ln|x+3|-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{5}\ln|x-2|+c.$$

   *Comme on cherche des primitives sur* $[0,1]$, *alors les primitives de* $f_1$ *sont de la forme*

$$F_1(x)=\frac{1}{20}\ln(x+3)-\frac{1}{4}\ln(1-x)-\frac{1}{5}\ln(2-x)+c.$$

2. *Calculons les primitives de* $f_2(x)=\dfrac{x^5}{x^4-2x^3+2x-1}$ *sur* $]-1,1[$.
   *Après décomposition en éléments simples, on trouve que*

$$f_2(x)=(x+2)+\frac{1}{8}\frac{1}{x+1}+\frac{31}{8}\frac{1}{x-1}+\frac{9}{4}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^3}.$$

   *Et en intégrant, on trouve*

$$\int f_2(x)\,dx=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{8}\ln|x+1|+\frac{31}{8}\ln|x-1|-\frac{9}{4}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^2}+c.$$

   *Comme on cherche des primitives sur* $]-1,1[$, *alors les primitives de* $f_2$ *sont données par :*

$$F_2(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{8}\ln(x+1)+\frac{31}{8}\ln(1-x)-\frac{9}{4}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^2}+c.$$

3. *Calculons les primitives de* $f_3(x) = \dfrac{6x^2+2}{x^4+x^2+1}$ *sur* $]-1,1[$.
*La décomposition en éléments simples donne que*

$$f_3(x) = \frac{-2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2x+1}{x^2-x+1}.$$

*Or,*

$$\begin{aligned}
\int \frac{-2x+1}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{2}{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx \\
&= 2\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx - \ln(x^2+x+1)+C_1 \\
&= \frac{8}{3}\int \frac{1}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}\,dx - \ln(x^2+x+1)+C_1 \\
&= \frac{8}{3}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}\,dx - \ln(x^2+x+1)+C_1
\end{aligned}$$

*En considérant le changement de variable* $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, *on a alors* $dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$ *et ainsi*

$$\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{3}{2}\arctan t + C_2 = \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C_2.$$

*Ainsi, on a :*

$$\int \frac{-2x+1}{x^2+x+1} = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \ln(x^2+x+1)+C \text{ où } C = C_1+C_2 \text{ est une constante réelle.}$$

*De même, on trouve que :*

$$\int \frac{2x+1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \ln(x^2-x+1)+K \text{ où } K \text{ est une constante réelle.}$$

*Et finalement on obtient*

$$\int f_3(x)\,dx = \ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right) + \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)+Cte.$$

## 6.4 Intégrales généralisées (ou impropres)

Dans ce paragraphe, on considèrera un intervalle semi-ouvert $[a,\ b[$ de $\mathbb{R}$ et une fonction $f$, définie sur $[a,\ b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, tels que :

ou bien $b = +\infty$
ou bien $b < +\infty$ et $f$ n'est pas définie en $b$.

On obtient des résultats analogues lorsque $f$ est définie sur un intervalle semi-ouvert $]a,\ b]$ tel que ou bien $a = -\infty$ ou bien $a > -\infty$ et $f$ n'est pas définie en $a$. Il suffit pour les démontrer de faire un changement de variable $t \mapsto -t$.

Lorsque $f$ est définie sur un intervalle ouvert $]a,\ b[$, on fixera un point $c \in ]a,\ b[$ et on considèrera séparément l'existence des intégrales généralisées de $f$ sur les deux intervalles semi-ouverts $]a,\ c]$ et $[c,\ b[$.

Afin d'introduire les intégrales généralisées, commençons par calculer les limites suivantes :

$$(a)\ \lim_{\lambda\to+\infty}\int_1^\lambda \frac{dx}{x^2}, \quad (b)\ \lim_{\lambda\to+\infty}\int_1^\lambda \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad (c)\ \lim_{\lambda\to1^-}\int_0^\lambda \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, \quad (d)\ \lim_{\lambda\to1^-}\int_0^\lambda \frac{dx}{(1-x)^2}.$$

On a alors :

$(a)$ Pour $\lambda > 1$, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,\ \lambda]$ de primitive la fonction $x \longmapsto \frac{-1}{x} + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante, ainsi

$$\int_1^\lambda \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

Et donc, $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_1^\lambda \frac{dx}{x^2} = 1$.

$(b)$ Pour $\lambda > 1$, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $[1,\ \lambda]$ de primitive la fonction $x \longmapsto 2\sqrt{x} + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante, ainsi

$$\int_1^\lambda \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\left[\sqrt{x}\right]_1^\lambda = 2(\sqrt{\lambda} - 1).$$

Et donc, $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_1^\lambda \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty$.

$(c)$ Pour $0 < \lambda < 1$, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est intégrable sur $[0,\ \lambda]$ de primitive la fonction $x \longmapsto \frac{-2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante, ainsi

$$\int_0^\lambda \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \ldots = \frac{2}{3} - \frac{-2}{3}(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}.$$

Et donc, $\lim_{\lambda\to1^-}\int_0^\lambda \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{3}$.

$(d)$ Pour $0 < \lambda < 1$, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ est intégrable sur $[0,\ \lambda]$ de primitive la fonction $x \longmapsto \frac{-1}{3}(1-x)^3 + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante, ainsi

$$\int_0^\lambda \frac{dx}{(1-x)^2} = \ldots = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}.$$

Et donc, $\lim_{\lambda\to1^-}\int_0^\lambda \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{3}$.

### 6.4.1 Définitions, propriétés

Soit $f$, une fonction réelle continue sur $I = [a,\ b[$ ($b$ finie ou $b = +\infty$). Dans ce cas, pour tout $\lambda \in I$, $f$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[a,\ \lambda]$. On peut donc considérer la fonction $F$ définie par :

$$F(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)\,dx.$$

Comme on l'a vu dans les exemples précédents, deux cas peuvent alors se présenter :

– $F(\lambda)$ admet une **limite finie** lorsque $\lambda \to b,\ \lambda < b$.

– $F(\lambda)$ n'admet pas de **limite finie** lorsque $\lambda \to b,\ \lambda < b$.

Nous introduisons alors les deux définitions suivantes :

**Définition 6.3.** *Soit $f$ une fonction continue sur tout fermé borné $[a,\ \lambda]$ pour tout $\lambda \in [a,\ b]$ et soit $F$ la fonction définie par $F(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)dx$. Si $F(\lambda)$ admet une **limite finie** lorsque $\lambda \to b,\ \lambda < b$ alors le symbole $\int_a^b f(x)dx$ est dit **intégrale généralisée convergente**.*

*La valeur de cette intégrale, est par définition, la limite de $F(\lambda)$. On note : $\lim_{\lambda\to b^-}\int_a^\lambda f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.*

*En cas de convergence, si $F$ est une primitive de $f$ sur $[a,b[$, on a alors : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b^-}[F(x) - F(a)]$.*

**Définition 6.4.** *Soit $f$ une fonction continue sur tout fermé borné $[a,\ \lambda]$ pour tout $\lambda \in [a,\ b]$ et soit $F$ la fonction définie par $F(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)dx$. Si $F(\lambda)$ n'admet pas de **limite finie** lorsque $\lambda \to a,\ \lambda > a$ alors le symbole $\int_a^b f(x)dx$ est dit **intégrale généralisée divergente**.*

**Exemple 6.7.**

1. *On a vu, en début de cette section, que $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ et $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$ sont des intégrales généralisées convergentes de valeurs respectives $1$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$.*

   *Par contre $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale généralisée divergente.*

2. *L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ est convergente alors que $\int_0^1\frac{1}{(1-x)^2}dx$ est divergente*

**Remarque 6.2.** *Comme cela a été mentionné en début de cette section, on peut également :*

– *définir la notion d'une intégrale généralisée impropre en la borne inférieure. Pour cela, la fonction $f$ doit être continue sur $]a,\ b]$ ($a$ fini ou $a = -\infty$) et la fonction $F(\lambda)$ étant définie par $F(\lambda) = \lim_{\lambda\to a^+}\int_\lambda^b f(x)dx$.*

– *définir la notion d'intégrale généralisée impropre en les deux bornes. Pour cela, soient : $]a,\ b[\subset \mathbb{R}$, ($a$ fini ou $a = -\infty$ et $b$ fini ou $b = +\infty$) et $c \in ]a,\ b[$. Soit $f$ continue sur $]a,\ b[$.*

  *On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est convergente lorsque les deux intégrales $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ sont convergentes.*

  *On pose alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.*

  *Si l'une des deux intégrales précédentes diverge, on dit alors que l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ est divergente.*

**Exemple 6.8.**

1. *L'intégrale généralisée "impropre en la borne inférieure"* $\int_0^1 \ln x\,dx$ *est convergente et vaut* $-1$*, car par une intégration par parties, on a*

$$F(\lambda)\int_\lambda^1 \ln x\,dx = \ldots = \lambda - \lambda\ln\lambda - 1,$$

*et* $\lim_{\lambda\to 0} F(\lambda) = -1$.

2. *L'intégrale généralisée "impropre en les deux bornes"* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ *est convergente car on a*

$$F_1(\alpha) = \int_\alpha 0\frac{1}{1+x^2}\,dx = \ldots = -\arctan\alpha \quad et \quad F_2(\beta) = \int_0^\beta \frac{1}{1+x^2}\,dx = \ldots = \arctan\beta,$$

*et de plus* $\lim_{\alpha\to-\infty} F_1(\alpha) = \frac{\pi}{2}$ *et* $\lim_{\beta\to+\infty} F_2(\beta) = \frac{\pi}{2}$.
*Ainsi* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$.

3. *L'intégrale généralisée "impropre en les deux bornes"* $\int_0^{+\infty} x\ln x\,dx$ *est divergente* $x \longmapsto \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$ *car est une primitive de* $x \longmapsto x\ln x$ *et donc*

$$F_2(\beta) = \int_1^\beta \frac{1}{1+x^2}\,dx = \ldots = \frac{1}{4} + \frac{\beta^2}{2}\ln(\beta) - \frac{\beta^2}{4},$$

*et de plus on a* $\lim_{\beta\to+\infty} F_2(\beta) = +\infty$.

**Proposition 6.4.** *Soit* $\int_a^b f(x)dx$ *une intégrale généralisée impropre en b, alors les intégrales* $\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_\alpha^b f(x)dx$ *sont de même nature (c'est à dire toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes) pour toute valeur* $\alpha \in [a,\ b[$.

**Remarque 6.3.**
- *On traduit ce résultat en énonçant : **"la nature d'une intégrale généralisée, impropre en la borne supérieure, ne dépend pas de la borne inférieure"**.*
- *Un résultat analogue peut être énonce pour une intégrale généralisée impropre en la borne inférieure.*

**Proposition 6.5.** *Soient :* $]a,\ b[\subset \mathbb{R}$*, (a fini ou* $a = -\infty$ *et b fini ou* $b = +\infty$*) et* $c \in ]a,\ b[$*. Soit f continue sur* $]a,\ b[$*. Alors, l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(x)dx$ *est convergente si et seulement si pour tout* $c,\ d \in ]a,\ b[$*, les deux intégrales* $\int_a^c f(x)dx$ *et* $\int_d^b f(x)dx$ *sont convergentes, ou de manière équivalente, si n'importe quelle primitive de f sur* $]a,\ b[$ *admet une limite finie en a par valeurs supérieures et en b par valeurs inférieures. Si F désigne une primitive de f sur* $]a,\ b[$*, on a alors* $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(a)$.

**Remarque 6.4.** *On traduit ce résultat en énonçant : **"la nature d'une intégrale généralisée, impropre aux deux bornes, ne dépend pas de la valeur intermédiaire"**.*

## 6.5 Exemples classiques d'intégrales impropres

Les intégrales généralisées suivantes -dites fondamentales ou classiques ou encore de base- convergent dans les cas précisés :

1. **Intégrales de Riemann.**
   - l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, où $a,\ \alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
   - l'intégrale $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$, où $a,\ \alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
   - l'intégrale $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, où $a,\ b,\ \alpha \in \mathbb{R}$ et $a < b$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
   - l'intégrale $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, où $a,\ b,\ \alpha \in \mathbb{R}$ et $a < b$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
2. l'intégrale $\int_0^1 \ln x\, dx$, est convergente.
3. l'intégrale $\int_a^{+\infty} e^{\alpha x}\, dx$, où $a,\ \alpha \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

## 6.6 Critères de convergence

L'intérêt de ces critères est de permettre de déterminer la nature d'une intégrale généralisée sans avoir à calculer la valeur ! Dans la suite, l'intégrale généralisée peut être impropre en sa borne inférieure ou supérieure ou en les deux ! On notera également par $|a,\ b|$ l'un des intervalles $]a,\ b]$, $[a,\ b[$ ou $]a,\ b[$

**Proposition 6.6.** *Soient $f$, $g$ continues sur l'intervalle $|a,b|$, et $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. Si $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont convergentes, alors il en est de même de $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx$ et on a*

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

**Remarque 6.5.** *On peut trouver des fonctions $f$ et $g$ telles que $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ divergent alors que $\int_a^b (f(x)+g(x))dx$ converge !*

**Proposition 6.7.** *Soit $f$ continue sur l'intervalle $[a,b[$ ou $b$ est fini. Si $f(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to b^-$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge.*
*on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est une fausse intégrale généralisée.*

**Exemple 6.9.**

1. *L'intégrale généralisée* $\int_1^2 \frac{\ln x}{1-x}\,dx$ *est une fausse intégrale généralisée car* $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = -1$. *Et on a* $\int_1^2 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = \frac{-\pi^2}{12}$.

2. *L'intégrale généralisée* $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx$ *est une fausse intégrale généralisée car* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. *Cette intégrale est donc convergente.*

3. *L'intégrale généralisée* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$ *est une fausse intégrale généralisée ente car* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. *Cette intégrale est donc convergente.*

**Proposition 6.8.** *Soient* $f$ *une fonction positive sur* $[a,\ b[$ *et* $M \in \mathbb{R}$ *tels que* $\int_a^\lambda f(x)dx \leq M$ *pour toute valeur* $\lambda \in [a,\ b[$, *alors* $\int_a^b f(x)dx$ *converge et on a* $0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq M$.

**Proposition 6.9.** *Soient* $f,\ g$ *deux fonctions positives sur* $[a,\ b[$ *(*$b$ *fini ou* $b = +\infty$*) vérifiant* $0 \leq f \leq g$ *sur* $[a,\ b[$

– *Si* $\int_a^b g(x)dx$ *converge, alors* $\int_a^b f(x)dx$ *converge et on a* $0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

– *Si* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge, alors* $\int_a^b g(x)dx$ *diverge.*

**Proposition 6.10.** *Soient* $f$ *et* $g$ *deux fonctions positives sur* $[a,\ b[$ *vérifiant* $f(x) \underset{b^-}{\sim} g(x)$ $f(x) \sim_{b^-} g(x)$ *sur* $[a,\ b[$ *(*$b$ *fini ou* $b = +\infty$*), alors les intégrales généralisées* $\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^b g(x)dx$ *sont de même nature.*

**Exemple 6.10.**

1. *Etude de l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

   *On sait que* $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ *pour tout* $x \in [1,\ +\infty[$, *or l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ *est convergente et vaut 1 puisque :*
   $$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1 - e^{-\infty} = 1.$$
   *Ainsi par application de la proposition 6.9, l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ *est convergente.*

   *Finalement l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ *est convergente car sa convergence ne dépend pas de la borne inférieure.*

2. *Prouvons la convergence de l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx$.

   *Les fonctions* $f : x \longmapsto \frac{\sin^2 x}{1+x^2}$ *et* $g : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ *vérifient les conditions de la proposition 6.9 puisque* $\forall x \in [0,\ +\infty[,\ \ 0 \leq \frac{\sin^2 x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ *et* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ *est convergente (cf Exemple 6.8).*

   *Donc,* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx$ *est également convergente.*

3. *En appliquant la proposition 6.10, on va prouver la convergence de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\,dx$.
   *En effet, les fonctions* $f : x \longmapsto \frac{\sin\sqrt{x}}{x}$ *et* $g : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ *sont équivalentes au voisinage de* $O^+$. *Or,* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *converge car* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$. *Ce qui prouve la convergence de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\,dx$.

## 6.7 Convergence absolue

**Définition 6.5.** *L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *est dite absolument convergente lorsque* $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ *est convergente.*

**Exemple 6.11.**

1. *L'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ *est absolument convergente car* $\displaystyle\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ *pour tout* $x \in [1, +\infty[$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ *est convergente.*
2. *L'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^3}\,dx$ *est absolument convergente car sa* $\displaystyle\left|\frac{\cos x}{1+x^3}\right| \leq \frac{1}{x^3}$ *pour tout* $x \in [1, +\infty[$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ *est convergente. Ainsi, puisque la convergence ne dépend pas de la borne inférieure, on voit que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^3}\,dx$ *est absolument convergente.*

**Proposition 6.11.** *Si une intégrale impropre est absolument convergente alors elle est convergente.*

**Remarque 6.6.** *La réciproque du résultat précédent est fausse.*